# O teoryi kinetycznej ruchu wirowego.

Przez

**Władysława Natansona.**

Rzecz, przedstawiona na posiedzeniu Wydziału mat.-przyr. d. 5 kwietnia 1897 r.

Mamy zamiar wyprowadzić, w notatce niniejszej, równania ruchu wirowego w płynach z kinetycznej teoryi materyi, mianowicie z jej ogólnej i oderwanej postaci, którą nazywamy teoryą molekularną kinematyczną [1]).

Prawa ruchu wirowego w płynach ukazują pewną nową cechę wewnętrznego w materyi działania, zwanego koercyą [2]) Mianowicie, ażeby równania ruchu wirowego, podane przez Helmholtza [3]) i przez Nansona [4]) były spełnione, siły koercyjne powinny czynić zadosyć zasadzie momentów ilości ruchu.

---

[1]) Por. „Wstęp do fizyki teoretycznej", Warszawa, 1890, rozdz. VIII. Rozprawy Ak. Um., W. M. P., tom XXIX, str. 171; tom XXVII, str. 273.

[2]) Rozprawy Ak. Um., W. M. P., tom XXVII, str. 288; tom XXX, str. 326.

[3]) Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, Bd. LV, p. 25 (1858). Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, p. 101. (1882).

[4]) Messenger of Mathematics, Vol. III, p. 120. Cyt. wedł. Lamba „Hydrodynamics" (1895), p. 226.

Sir G. G. Stokes spostrzegł już w r. 1845-ym pewien związek praw ruchu wirowego elementów płynu z zasadą momentów [1]). W pięknej pracy p. M. Brillouin [2]) znaleźliśmy również, zbyt krótką niestety, wzmiankę o tym przedmiocie. Pod wpływem uczynionej przez tego uczonego uwagi ułożyliśmy dowód równoległy, który podajemy poniżej w §§. 4 i 6; zaznaczamy jednak, że z rozumowaniem, którem p. Brillouin kierować się zdaje, nie możemy zgodzić się całkowicie [3]).

## §. 1. Założenia.

Niechaj liczba cząsteczek w jednostce objętości wynosi $n$.

Przypuśćmy, że liczba cząsteczek, których spółrzędne, w chwili $t$, mieszczą się w granicach:

$$x \text{ i } x+dx, \quad y \text{ i } y+dy, \quad z \text{ i } z+dz \tag{1}$$

i których składowe prędkości, w tejże chwili, mieszczą się w granicach:

$$a \text{ i } a+da, \quad b \text{ i } b+db, \quad c \text{ i } c+dc, \tag{2}$$

wynosi:

$$dxdydz\; dadbdcF(x, y, z, a, b, c, t). \tag{3}$$

Mamy więc, całkując w granicach, w jakich $a$, $b$, $c$ zmieniać się wogóle mogą,

$$\iiint da\, db\, dc\, F(x, y, z, a, b, c, t) = n\,; \tag{4}$$

zatem, oznaczając przez $m$ masę cząsteczki (o której przypuszczamy, że jest dla wszystkich cząsteczek jednakowa), mamy, dla przeciętnej w elemencie $dx\, dy\, dz$ wartości $\bar{Q}$ jakiejbądź funkcyi $Q$ prędkości $a$, $b$, $c$,

$$\rho\bar{Q} = \iiint da\, db\, dc\, m\, QF\,, \tag{5}$$

gdzie $\rho$ oznacza gęstość $mn$, $F$ zaś napisano przez skrócenie zamiast $F(x, y, z, a, b, c, t)$.

---

[1]) Transactions of the Cambr. Phil. Soc., Vol. VIII, zakończenie rozdziału II-go. „Mathematical and Physical Papers", Vol. I, p. 112—113.

[2]) „Recherches Récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique", Paris 1891, p. 15 (w przypisku).

[3]) Ostatnie zdanie w przypisku np. zdaje się być wprost błędne.

Uważajmy w płynie dwa bardzo blizkie siebie punkty:

(6) $(x, y, z)$ oraz $(x_0, y_0, z_0)$.

Wyobrażamy sobie dokoła punktu $(x, y, z)$ element $dx\, dy\, dz$, oraz dokoła punktu $(x_0, y_0, z_0)$ element $dx_0\, dy_0\, dz_0$. Przypuszczamy, że własności [określonej przez (3)] funkcyi $F$ pozwalają na rozwijanie jej w sposób następujący:

(7) $$F = F_0 + (x-x_0)\frac{\partial F_0}{\partial x_0} + (y-y_0)\frac{\partial F_0}{\partial y_0} + (z-z_0)\frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \dots,$$

gdzie znowu $F_0$ oznacza $F(x_0, y_0, z_0, a, b, c, t)$. Przypuszczamy, że funkcye

(8) $$\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$$

pozwalają rozwijać się w sposób podobny.

Oznaczmy przez

(9) $$dx\, dy\, dz\, da\, db\, dc\, dt\, L$$

liczbę cząsteczek, które, wskutek koercyi, w obrębie elementu $dx\, dy\, dz$ i w przeciągu czasu $dt$, tracą składowe prędkości, zawarte między

(10) $$a \text{ i } a + da, \quad b \text{ i } b + db, \quad c \text{ i } c + dc.$$

Oznaczmy podobnie przez

(11) $$dx\, dy\, dz\, da\, db\, dc\, dt\, L'$$

liczbę cząsteczek, które, również wskutek koercyi, w obrębie tegoż elementu i w przeciągu tegoż czasu, zyskują takież składowe prędkości. Oznaczmy jeszcze przez $X$, $Y$, $Z$ przyśpieszenia, sprawiane przez siły zewnętrzne w miejscu $x$, $y$, $z$ płynu. Mamy wówczas, jak wiadomo,

(12) $$L' - L = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial z} + X\frac{\partial F}{\partial a} + Y\frac{\partial F}{\partial b} + Z\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

według znanego równania Boltzmanna [1]). Bliższe wyznaczenie natury wyrazu $L' - L$, które wymagałoby przyjęcia bardziej szczegółowych molekularnych hypotez, nie jest nam potrzebne.

Równanie ciągłości, oraz równania ruchu, wynikają, jak wiadomo, łatwo z równania (12). Liczba cząsteczek nie zmienia się skutkiem koercyi; zatem w dowolnej objętości

---

[1]) Sitzber. d. Wien. Akad. (II), Bd. LXVI. 1872. Vorlesungen über Gastheorie, I Th., p. 114. 1895.

$$dt \iiint dx\, dy\, dz \iiint da\, db\, dc\, (L'-L) = 0 \tag{13}$$

i ztąd wypada równanie ciągłości; ilość ruchu cząsteczek nie zmienia się skutkiem koercyi; zatem w dowolnej objętości

$$dt \iiint dxdydz \iiint dadbdc\; ma\, (L' - L) = 0 \tag{14}$$

i tak dalej dla pozostałych osi; ztąd wynikają równania ruchu:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho X - \left\{ \frac{\partial \rho \overline{aa}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{ab}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{ac}}{\partial z} \right\} \tag{15 a}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = \rho Y - \left\{ \frac{\partial \rho \overline{ba}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{bb}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{bc}}{\partial z} \right\} \tag{15 b}$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} = \rho Z - \left\{ \frac{\partial \rho \overline{ca}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{cb}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{cc}}{\partial z} \right\}, \tag{15 c}$$

w których $u$, $v$, $w$ oznaczają przeciętne

$$\rho u = \iiint dadbdc\; ma\, F \tag{16 a}$$

$$\rho v = \iiint dadbdc\; mb\, F \tag{16 b}$$

$$\rho w = \iiint dadbdc\; mc\, F. \tag{16 c}$$

Oznaczmy przez $p_{xx}$, $p_{xy}$, $p_{xz}$ i $p_{yx}$, $p_{yy}$, $p_{yz}$ i $p_{zx}$, $p_{zy}$, $p_{zz}$ zwykłe składowe ciśnienia w miejscu $(x, y, z)$; równanie (15 a) możemy napisać

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho X - \left\{ \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} \right\} \tag{17 a}$$

i dwa następne możemy napisać podobnie.

## §. 2. Twierdzenie zasadnicze.

Uważajmy pewną, bardzo małą, zresztą zaś dowolną objętość $\Omega$. Obierzmy za punkt $(x_0, y_0, z_0)$ poprzedzającego artykułu jakibądź punkt stały tej objętości, np. jego geometryczny (nie zaś istotny) środek bezwładności, tak iż

$$\iiint dx\, dy\, dz\, (x - x_0) = 0 \text{ i t. d.} \tag{1}$$

W razie równomiernego rozkładu masy w objętości $\Omega$, i tylko w tym razie, punkt $(x_0\ y_0\ z_0)$ będzie istotnym środkiem bezwładności tej objętości.

Moment ilości ruchu, względem osi, przechodzącej przez punkt $(x_0\ y_0\ z_0)$ i równoległej do osi $Ox$, dla wszystkich cząsteczek, należących do kategoryi (2) i (1), § 1, rośnie, w przeciągu czasu $dt$, skutkiem koercyi, o

$$dx\,dy\,dz\;da\,db\,dc\;dt\;L'\left\{(y-y_0)\,mc-(z-z_0)\,mb\right\}, \tag{2}$$

zmniejsza się zaś, w tym czasie, skutkiem koercyi, o

$$dx\,dy\,dz\;da\,db\,dc\;dt\;L\left\{(y-y_0)\,mc-(z-z_0)\,mb\right\}. \tag{3}$$

Musimy mieć zatem, jeśli siły koercyi ulegają zasadzie momentów, w każdej objętości dowolnej

$$dt\iiint dx\,dy\,dz\iiint da\,db\,dc\left\{L'-L\right\}\left\{(y-y_0)\,mc-(z-z_0)mb\right\}=0. \tag{4}$$

Ztąd zaś wynika, według równania (12) w § 1, że dla każdej objętości dowolnej

$$\iiint dxdy\,dz\iiint dadbdc\ \Psi = 0\text{, gdzie} \tag{5}$$

$$\Psi=\left\{(y-y_0)\,mc-(z-z_0)\,mb\right\}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial t}+a\dfrac{\partial F}{\partial x}+b\dfrac{\partial F}{\partial y}+c\dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \quad+X\dfrac{\partial F}{\partial a}+Y\dfrac{\partial F}{\partial b}+Z\dfrac{\partial F}{\partial c}\end{array}\right\}. \tag{6}$$

Jest to równanie zasadnicze w naszem zadaniu.

## §. 3. Rachunek pierwszy.

Wyraz $\partial F/\partial t$ wytwarza w równaniu tem wyraz, który oznaczymy przez $K(t)$:

$$K(t)=\iiint dx\,dy\,dz\iiint da\,db\,dc\left\{(y-y_0)mc-(z-z_0)\,mb\right\}\frac{\partial F}{\partial t}= \tag{1}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint dx\,dy\,dz\left\{(y-y_0)\,\rho w-(z-z_0)\,\rho v\right\}.$$

Lecz z (16 c) oraz z (7) w § 1. mamy

$$\rho w = \iiint da\, db\, dc\ mc\, F \tag{2}$$

$$= \iiint da\, db\, dc\ mc \left\{ F_0 + (x-x_0) \frac{\partial F_0}{\partial x_0} + (y-y_0) \frac{\partial F_0}{\partial y_0} + (z-z_0) \frac{\partial F_0}{\partial z_0} \right\}$$

$$= \rho_0 w_0 + (x-x_0) \frac{\partial \rho_0 w_0}{\partial x_0} + (y-y_0) \frac{\partial \rho_0 w_0}{\partial y_0} + (z-z_0) \frac{\partial \rho_0 w_0}{\partial z_0}$$

$$= \rho w_0 + \rho_0 \left\{ (x-x_0) \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + (y-y_0) \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + (z-z_0) \frac{\partial w_0}{\partial z_0} \right\}$$

i podobnie

$$\rho v = \rho v_0 + \rho_0 \left\{ (x-x_0) \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + (y-y_0) \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + (z-z_0) \frac{\partial v_0}{\partial z_0} \right\} \tag{3}$$

albowiem z (7) w § 1 wynika oczywiście

$$\rho = \rho_0 + (x-x_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} + (y-y_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial y_0} + (z-z_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial y_0}. \tag{4}$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) i kładąc:

$$\left.\begin{array}{ll} \iiint dxdydz\, (x-x_0)^2 = J_{xx}; & \iiint dxdydz\, (y-y_0)(z-z_0) = J_{yz} = J_{zy}; \\ \iiint dxdydz\, (y-y_0)^2 = J_{yy}; & \iiint dxdydz\, (z-z_0)(x-x_0) = J_{zx} = J_{xz}; \\ \iiint dxdydz\, (z-z_0)^2 = J_{zz}; & \iiint dxdydz\, (x-x_0)(y-y_0) = J_{xy} = J_{yx}; \end{array}\right\} \tag{5}$$

otrzymamy

$$K(t) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint dxdydz \left\{ (y-y_0)\, \rho w_0 - (z-z_0)\, \rho v_0 \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 \left[ J_{yx} \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + J_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + J_{yz} \frac{\partial w_0}{\partial z_0} \right.\right.$$

$$\left.\left. - J_{zx} \frac{\partial v_0}{\partial x_0} - J_{zy} \frac{\partial v_0}{\partial y_0} - J_{zz} \frac{\partial v_0}{\partial z_0} \right] \right\}. \tag{6}$$

Wyrazy w równaniu (5), § 2, które pochodzą od $a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} + c \frac{\partial F}{\partial z}$, wynoszą:

$$K(x) + K(y) + K(z) = \tag{7}$$

$$= \iiint dx\,dy\,dz \iiint da db dc \,\{ (y-y_0)\,mc - (z-z_0)\,mb \} \times$$

$$\times \left\{ a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} + c \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$$

$$= \iiint dx dy\, dz \left\{ (y-y_0) \left( \frac{\partial \rho \overline{ac}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{bc}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{cc}}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. -(z-z_0) \left( \frac{\partial \rho \overline{ab}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{bb}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{cb}}{\partial z} \right) \right\}.$$

Wyrazy w równaniu (5), § 2, które pochodzą od $X \frac{\partial F}{\partial a} + Y \frac{\partial F}{\partial b} + Z \frac{\partial F}{\partial c}$, wynoszą:

$$K(a) + K(b) + K(c) = \tag{8}$$

$$= \iiint dx\,dy\,dz \iiint da\,db\,dc \,\{ (y-y_0)\,mc - (z-z_0)\,mb \} \times$$

$$\times \left\{ X \frac{\partial F}{\partial a} + Y \frac{\partial F}{\partial b} + Z \frac{\partial F}{\partial c} \right\}$$

$$= \iiint dx\,dy\,dz \,\{ (z-z_0)\,\rho Y - (y-y_0)\,\rho Z \};$$

istotnie, łatwo widzimy, że wyrazy kształtu

$$\iiint da db dc \,\{ (y-y_0)\,mc - (z-z_0)\,mb \}\; X \frac{\partial F}{\partial a} \tag{9}$$

są równe zeru; uważając *da db dc* za element objętościowy przestrzeni fikcyjnej, w której zbudowano diagramat prędkości, i przekształcając całkę (9) na powierzchniową, przekonywamy się natychmiast, że ta powierzchniowa całka jest równa zeru.

Oznaczmy

$$\left.\begin{aligned} \rho X - \left( \frac{\partial \rho \overline{aa}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{ab}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{ac}}{\partial z} \right) &= \rho P \\ \rho Y - \left( \frac{\partial \rho \overline{ba}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{bb}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{bc}}{\partial z} \right) &= \rho Q \\ \rho Z - \left( \frac{\partial \rho \overline{ca}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{cb}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{cc}}{\partial z} \right) &= \rho R; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

mamy wówczas

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho P; \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} = \rho Q; \quad \frac{\partial \rho w}{\partial t} = \rho R; \tag{11}$$

tem samem więc, według założeń, uczynionych co do $\partial F / \partial t$,

$$\begin{aligned} \rho P &= \rho_0 P_0 + (x - x_0) \frac{\partial \rho_0 P_0}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial \rho_0 P_0}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial \rho_0 P_0}{\partial z_0} \\ &= \rho P_0 + \rho_0 \left\{ (x - x_0) \frac{\partial P_0}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial P_0}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial P_0}{\partial z_0} \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Podobne równania stosują się do $\rho Q$ i do $\rho R$.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} K(x) + K(y) + K(z) + K(a) + K(b) + K(c) &= \\ = - \iiint dx dy dz \{ (y - y_0) \rho R_0 - (z - z_0) \rho Q_0 \} & \\ - \rho_0 \left[ J_{yx} \frac{\partial R_0}{\partial x_0} + J_{yy} \frac{\partial R_0}{\partial y_0} + J_{yz} \frac{\partial R_0}{\partial z_0} - J_{zx} \frac{\partial Q_0}{\partial x_0} - J_{zy} \frac{\partial Q_0}{\partial y_0} - J_{zz} \frac{\partial Q_0}{\partial z_0} \right]. & \end{aligned} \tag{13}$$

Równanie zasadnicze (5), § 2, brzmi:

$$K(t) + K(x) + K(y) + K(z) + K(a) + K(b) + K(c) = 0. \tag{14}$$

Uważajmy w tem równaniu wyrazy, nie pomnożone przez czynniki $J$. Mamy:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint dxdydz\,\{\,(y-y_0)\,\rho w_0\;-\;(z-z_0)\,\rho v_0\,\}\tag{15}$$

$$-\iiint dxdydz\,\{\,(y-y_0)\,\rho R_0-(z-z_0)\,\rho Q_0\,\}=$$

$$=w_0\left\{J_{yx}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial x_0\partial t}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_0}\right)+J_{yy}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial y_0\partial t}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}\right)+\right.$$

$$\left.+J_{yz}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z_0\partial t}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial z_0}\right)\right\}-v_0\left\{J_{zx}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial x_0\,\partial t}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_0}\right)+\right.$$

$$\left.+J_{zy}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial y_0\,\partial t}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}\right)+J_{zz}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z_0\partial t}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial z_0}\right)\right\}.$$

Równanie (5), § 2, przybiera postać:

$$J_{yx}\,[wx]+J_{yy}\,[wy]+J_{yz}\,[wz]\tag{16}$$

$$-J_{zx}\,[vx]-J_{zy}\,[vy]-J_{zz}\,[vz]=0\,,$$

gdzie, dla skrócenia, piszemy

$$\left\{\begin{aligned}&[wx]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\,\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)-\rho_0\,\frac{\partial R_0}{\partial x_0}+w_0\,\frac{\partial^2\rho_0}{\partial x_0\,\partial t}-\frac{w_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_0}\\&\qquad\qquad\text{i t. d.}\\&[vx]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\,\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)-\rho_0\,\frac{\partial Q_0}{\partial x_0}+v_0\,\frac{\partial^2\rho_0}{\partial x_0\,\partial t}-\frac{v_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_0}\\&\qquad\qquad\text{i t. d.}\end{aligned}\right.\tag{17}$$

Zakładając teraz objętość $\Omega$ symetryczną, t. j. czyniąc

$$J_{xx}=J_{yy}=J_{zz}=J\tag{18}$$

$$J_{yz}=0;\quad J_{zx}=0;\quad J_{xy}=0\tag{19}$$

otrzymujemy z (16)

$$[\,wy\,]-[\,vz\,]=0.\tag{20}$$

Weźmy wyraz $-\rho_0\,(\partial R_0\,/\,\partial y_0-\partial Q_0\,/\,\partial z_0)$, który znajduje się tu pomiędzy innemi. Oznaczmy

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right) &= A \\ Y - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right) &= B \\ Z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) &= C\,; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

założmy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial y_0} - \frac{\partial v_0}{\partial z_0} &= 2\xi \\ \frac{\partial u_0}{\partial z_0} - \frac{\partial w_0}{\partial x_0} &= 2\eta \\ \frac{\partial v_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_0}{\partial y_0} &= 2\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

oraz

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = \theta\,; \tag{23}$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} -\rho_0\left(\frac{\partial R_0}{\partial y_0} - \frac{\partial Q_0}{\partial z_0}\right) = &-\rho_0\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right) + 2\xi\theta \\ &-\rho_0\left\{\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{w_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{v_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\right)\right\} \\ &-2\left\{\xi\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \eta\frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \zeta\frac{\partial u_0}{\partial z_0}\right\} + \\ &+2\left\{u_0\frac{\partial \xi}{\partial x_0} + v_0\frac{\partial \xi}{\partial y_0} + w_0\frac{\partial \xi}{\partial z_0}\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Powracając zatem do równania (20):

$$\frac{d\xi}{dt} + \xi\theta = \xi\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \eta\frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \zeta\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right\}, \tag{25}$$

gdzie

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x_0} + v_0\frac{\partial}{\partial y_0} + w_0\frac{\partial}{\partial z_0}. \tag{26}$$

Wprowadzając teraz równanie ciągłości:

$$(27)\quad \rho_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho_0}\right) = \xi \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \eta \frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \zeta \frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right).$$

Równanie (27) jest właśnie pierwszem z pomiędzy trzech równań Helmholtza i Nansona, z tą jedynie różnicą, że obaj ci uczeni czynili założenia (że ciśnienia styczne nie istnieją, że gęstość jest funkcyą ciśnienia zwykłego, że siły zewnętrzne mają potencyał) skutkiem których

$$(28)\quad \frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0} = 0 \qquad \text{i t. d.}$$

## § 4. Rachunek drugi.

Przytoczymy teraz inny spobób wyprowadzenia równań Helmholtza-Nansona z równania (5), § 2. Obliczamy najprzód sumę

$$(1)\quad K(t) + K(x) + K(y) + K(z).$$

Mamy z (1), § 3:

$$(2)\quad K(t) = \iiint dxdydz \left\{ (y-y_0)\frac{\partial \rho w}{\partial t} - (z-z_0)\frac{\partial \rho v}{\partial t} \right\};$$

dalej zaś z (7), tamże,

$$(3)\quad K(x) + K(y) + K(z) =$$

$$= \iiint dxdydz \left\{ (y-y_0)\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) - \right.$$

$$\left. -(z-z_0)\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right)\right\} +$$

$$+ \iiint dxdydz \left\{ \begin{array}{l} (y-y_0)\left(\rho w\theta + u\dfrac{\partial \rho w}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho w}{\partial y} + w\dfrac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \\ -(z-z_0)\left(\rho v\theta + u\dfrac{\partial \rho v}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho v}{\partial y} + w\dfrac{\partial \rho v}{\partial z}\right) \end{array} \right\}.$$

Łącząc drugą całkę w (3) z całką (2) i zważając, iż

$$(4)\quad (y-y_0)\frac{d\rho w}{dt} - (z-z_0)\frac{d\rho v}{dt} = \rho w v_0 - \rho v w_0 + \frac{d}{dt}\{(y-y_0)\rho w - (z-z_0)\rho v\}$$

oraz, iż

$$\theta\, dxdydz = \frac{d}{dt}\,(dxdydz), \tag{5}$$

otrzymujemy stąd

$$\frac{d}{dt}\iiint dxdydz\,\rho\,\{(y-y_0)\,w-(z-z_0)\,v\}+\iiint dxdydz\,(\rho w v_0-\rho v w_0); \tag{6}$$

ale drugi wyraz znika, po rozwinięciu $\rho w$ oraz $\rho v$ według (2) i (3) w § 3. Znowu zaś całka pierwsza po prawej stronie powyższego równania (3), daje, razem z wyrazami $K(a)$, $K(b)$, $K(c)$ prawą stronę w równaniu

$$\frac{d}{dt}\iiint dxdydz\,\rho\,\{(y-y_0)\,w-(z-z_0)\,v\}$$
$$=\iiint dxdydz\,\rho\,\{(y-y_0)\,C-(z-z_0)\,B\}, \tag{7}$$

[por. (8) i (21) § 3], które tym sposobem wynika z (5) w § 2, lub z (14) w §. 3.

Załóżmy

$$\varepsilon=\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=\frac{1}{\rho}\left\{(x-x_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}+(z-z_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial z_0}\right\}; \tag{8}$$

mamy

$$w=w_0+(1-\varepsilon)\left\{(x-x_0)\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial w_0}{\partial y_0}+(z-z_0)\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right\}; \tag{9}$$

lecz, ponieważ $\varepsilon$ jest wielkością takiego rzędu, jak $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ oraz $(z-z_0)$, przeto, odrzucając w (9) wyrazy, wynikające z obecności $\varepsilon$, pozostaniemy przy dokładności rachunku, sięgającego wyrazów rzędu pierwszego. Tym sposobem otrzymamy:

$$\iiint dxdydz\,\rho\,\{(y-y_0)\,w-(z-z_0)\,v\}= \tag{10}$$

$$=w_0\iiint dxdydz\,\rho\,(y-y_0)-v_0\iiint dxdydz\,\rho\,(z-z_0)+$$

$$+G_{yx}\frac{\partial w_0}{\partial x_0}+G_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y_0}+G_{yz}\frac{\partial w_0}{\partial z_0}-G_{zx}\frac{\partial v_0}{\partial x_0}-G_{zy}\frac{\partial v_0}{\partial y_0}-G_{zz}\frac{\partial v_0}{\partial z_0},$$

gdzie

$$(11)\quad \begin{cases} G_{xx} = \iiint dxdydz\, \rho\, (x-x_0)^2; \; G_{zy} = G_{yz} = \iiint dxdydz\, \rho\, (y-y_0)(z-z_0); \\ G_{yy} = \iiint dxdydz\, \rho\, (y-y_0)^2; \; G_{xz} = G_{zx} = \iiint dxdydz\, \rho\, (z-z_0)(x-x_0); \\ G_{zz} = \iiint dxdydz\, \rho\, (z-z_0)^2; \; G_{yx} = G_{xy} = \iiint dxdydz\, \rho\, (x-x_0)(y-y_0). \end{cases}$$

W równaniu (7) znajduje się pochodna zupełna (jaką wyraża znak $d / dt$) wielkości (10). Zbadajmy zatem, czy i w jaki sposób zmieniają się z czasem momenty i iloczyny bezwładności $G_{xx}$ i t. d. Oczywistą jest rzeczą, że wolno przypuszczać, iż w pewnej dowolnej chwili momenty $G_{xx}$, $G_{yy}$, $G_{zz}$ są równe sobie a iloczyny $G_{yz}$, $G_{zx}$, $G_{xy}$ są równe zeru; lecz bynajmniej nie wolno przypuszczać, że momenty te pozostaną równe sobie a iloczyny pozostaną równe zeru. Symetryczna bowiem w pewnej danej chwili objętość, wypełniona płynem, przestanie wogóle być symetryczna, skutkiem ruchu płynu.

## § 5. Zmiany w momentach i iloczynach bezwładności.

Oznaczmy, jak następuje, elementy deformacyi:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial x_0} = e; \quad \dfrac{\partial w_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial v_0}{\partial z_0} = 2\alpha; \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y_0} = f; \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial z_0} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x_0} = 2\beta; \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial z_0} = g; \quad \dfrac{\partial v_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y_0} = 2\gamma. \end{cases}$$

Z określenia wielkości $G$ mamy:

$$(2)\quad \frac{dG_{xx}}{dt} = 2 \iiint dxdydz\, \rho\, (x-x_0)(u-u_0)$$

$$= 2\rho_0 \left\{ J_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + J_{xy} \frac{\partial u_0}{\partial y_0} + J_{xz} \frac{\partial u_0}{\partial z_0} \right\}.$$

$$\frac{dG_{yz}}{dt} = \iiint dxdydz\, \rho \left\{ (y-y_0)(w-w_0) + (z-z_0)(v-v_0) \right\} \tag{3}$$

$$= \rho_0 \left\{ J_{yx} \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + J_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + J_{yz} \frac{\partial w_0}{\partial z_0} + J_{zx} \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + J_{zy} \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + J_{zz} \frac{\partial v_0}{\partial z_0} \right\}$$

i cztery dalsze analogiczne równania. Stąd widzimy, że jeśli pewna objętość jest symetryczna w pewnej danej chwili, przestaje nią być według równań

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG_{xx}}{dt} &= 2\rho_0 J e; & \frac{dG_{yz}}{dt} &= 2\rho_0 J \alpha; \\ \frac{dG_{yy}}{dt} &= 2\rho_0 J f; & \frac{dG_{zx}}{dt} &= 2\rho_0 J \beta; \\ \frac{dG_{zz}}{dt} &= 2\rho_0 J g; & \frac{dG_{xy}}{dt} &= 2\rho_0 J \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Możemy, w przyjętym stopniu dokładności, pisać $G$, czyli wspólną wartość $G_{xx}$, $G_{yy}$ oraz $G_{zz}$ w pierwotnie symetrycznej objętości, zamiast $\rho_0 J$; tak iż z (4) wynika

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2G}\frac{dG_{xx}}{dt} &= e; & \frac{1}{2G}\frac{dG_{yz}}{dt} &= \alpha; \\ \frac{1}{2G}\frac{dG_{yy}}{dt} &= f; & \frac{1}{2G}\frac{dG_{zx}}{dt} &= \beta; \\ \frac{1}{2G}\frac{dG_{zz}}{dt} &= g; & \frac{1}{2G}\frac{dG_{xy}}{dt} &= \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Równania te uwydatniają w nowy (o ile nam wiadomo) sposób fizyczne znaczenie elementów $e$, $f$, $g$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

## § 6. Dokończenie rachunku drugiego.

Przypuszczając teraz, że uważana objętość jest symetryczna w danej chwili, ale tylko w niej, oraz posługując się równaniami (5) poprzedzającego artykułu, otrzymamy

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\iiint dxdydz\,\rho\,\{(y-y_0)\,w-(z-z_0)\,v\}=$$

$$=J\left\{\frac{dw_0}{dt}\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}-\frac{dv_0}{dt}\frac{\partial\rho_0}{\partial z_0}\right\}+2G\left\{\frac{d\xi}{dt}+\xi(f+g)-\eta\gamma-\zeta\beta\right\}$$

$$=J\left\{\frac{dw_0}{dt}\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}-\frac{dv_0}{dt}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\right\}+2G\left\{\frac{d\xi}{dt}+\xi\theta-\xi\frac{\partial u_0}{\partial x_0}-\eta\frac{\partial u_0}{\partial y_0}-\zeta\frac{\partial u_0}{\partial z_0}\right\}.$$

Obliczmy podobnie stronę prawą równania (7), § 4. Mamy

$$(2)\quad A=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Możemy dowieść łatwo, na zasadzie uczynionych założeń, że mamy np.

$$(3)\quad \frac{\partial\rho u}{\partial x}=\frac{\partial\rho_0u_0}{\partial x_0}+(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\rho_0u_0}{\partial x_0}\right)+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\rho_0u_0}{\partial x_0}\right)+$$
$$+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\rho_0u_0}{\partial x_0}\right)$$

a zatem mamy rozwinięcia podobne dla $\partial u/\partial x$, dla $\partial u/\partial y$, dla $\partial u/\partial z$ zatem również, w przyjętym stopniu dokładności, dla wielkości

$$(4)\quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},$$

nakoniec mamy je dla $\partial\rho u/\partial t$, więc dla $\partial u/\partial t$, zatem ostatecznie mamy je dla $A$, dla $B$ i dla $C$. Prawa strona więc w równaniu (7), § 4

$$(5)\quad \iiint dxdydz\,\{(y-y_0)\,C-(z-z_0)\,B\}$$

wyniesie, dla objętości symetrycznej, co następuje:

$$(6)\quad =J\left\{C_0\frac{\partial\rho_0}{\partial y_0}-B_0\frac{\partial\rho_0}{\partial z_0}\right\}+G\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0}-\frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right).$$

Porównawszy (6) z lewą stroną tegoż równania, obliczoną wyżej pod (1), otrzymujemy znowu

$$(7)\quad \rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho_0}\right)=\xi\frac{\partial u_0}{\partial x_0}+\eta\frac{\partial u_0}{\partial y_0}+\zeta\frac{\partial u_0}{\partial z_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0}-\frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right),$$

pierwsze z pomiędzy uzupełnionych równań Helmholtza - Nansona.

Uczynimy tu jeszcze następującą uwagę. Załóżmy:

$$\iiint dxdydz \{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\} = G_{yy} + G_{zz} = H_x. \tag{8}$$

W razie objętości symetrycznej mamy:

$$H_x = 2G_{xx}; \quad \text{oraz} \tag{9}$$

$$\frac{dH_x}{dt} = 2G(f+g) \text{ według (5) w § 5.} \tag{10}$$

Zatem, z równania, które wynika z pierwotnego kształtu prawej strony w równaniu powyższem (1), mianowicie z równania

$$2G\left\{\frac{d\xi}{dt} + \xi(f+g) - \eta\gamma - \zeta\beta\right\} = G\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right) \tag{11}$$

możemy wyprowadzić:

$$\frac{d(H_x\xi)}{dt} = H_x\left\{\eta\gamma + \zeta\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right)\right\}. \tag{12}$$

Przypuszczając tu, że chwilowo $\eta = 0$, $\zeta = 0$, otrzymujemy znane twierdzenie o własnościach iloczynu prędkości wirowania przez pole przecięcia objętości, poprzecznego do osi wirowania. Z trzech równań zresztą, z których (7) stanowi pierwsze, wynika łatwo, że szybkość zmieniania się iloczynu prędkości wirowania przez pole poprzecznego przecięcia wynosi ogólnie:

$$\frac{\sigma}{2}\left\{l\left(\frac{\partial C_0}{\partial y_0} - \frac{\partial B_0}{\partial z_0}\right) + m\left(\frac{\partial A_0}{\partial z_0} - \frac{\partial C_0}{\partial x_0}\right) + n\left(\frac{\partial B_0}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial y_0}\right)\right\}, \tag{13}$$

gdzie $\sigma$ jest polem poprzecznego przecięcia, $l$ zaś, $m$ i $n$ są dostawami kierunkowemi prędkości wirowania.

Inna jeszcze uwaga, która nasuwa się w przedmiocie poprzedzającego wywodu, jest następująca. Cauchy, Stokes, Helmholtz i wszyscy wogóle, o ile nam wiadomo, autorowie przypuszczali, że prędkości $u, v, w$ w miejscu $(x, y, z)$, bardzo blizkiem miejsca $(x_0, y_0, z_0)$, mogą być rozwijane w sposób następujący:

$$u = u_0 + (x-x_0)\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + (y-y_0)\frac{\partial u_0}{\partial y_0} + (z-z_0)\frac{\partial u_0}{\partial z_0} \tag{14}$$

i t. d.; gdzie $u_0$, $v_0$, $w_0$ oznaczają składowe prędkości w miejscu $(x_0, y_0, z_0)$. Tymczasem, z naszych założeń, uzadnionych przez teoryą kinetyczną, wynikało (por. § 3), że

$$\rho u = \rho_0 u_0 + (x - x_0) \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial z_0} \tag{15}$$

i t. d.; albo, że

$$u = u_0 + \frac{\rho_0}{\rho} \left\{ (x - x_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial u_0}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial u_0}{\partial z_0} \right\}. \tag{16}$$

Po odrzuceniu więc, jak się czyni zazwyczaj, ruchu postępowego i zwykłych deformacyj elementu, nie otrzymamy w płynach ściśliwych ruchu ściśle wirowego elementu, lecz raczej ruch, złożony z wirowego i z n o w e j deformacyi. Lecz różnica ta nie jest istotna, gdyż tyczy się jedynie wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy. Albowiem wyraz $\varepsilon$ z § 4-go, czyli

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left\{ (x - x_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial z_0} \right\} \tag{17}$$

jest funkcyą jednorodną stopnia 1-go różnic $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$, a przeto wartości $u$, obliczane według (14) i według (16), mogą różnić się tylko o wielkości rzędu wyższego niż pierwszy.