271.

SUR L'INVARIANT LE PLUS SIMPLE D'UNE FONCTION QUADRATIQUE BI-TERNAIRE, ET SUR LE RÉSULTANT DE TROIS FONCTIONS QUADRATIQUES TERNAIRES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LVII. (1860), pp. 139—148.]

M. SYLVESTER a trouvé depuis longtemps, pour le résultant des trois fonctions quadratiques ternaires

$$(a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h\ )\,(x,\ y,\ z)^2,$$
$$(a'\ ,\ b',\ c'\ ,\ f'\ ,\ g',\ h')\,(x,\ y,\ z)^2,$$
$$(a'',\ b'',\ c'',\ f'',\ g'',\ h'')\,(x,\ y,\ z)^2,$$

une expression remarquable

$$12R = 16C_{12} - C_6^{\,2},$$

où C_{12}, C_6 représentent des fonctions données des coefficients qui sont non seulement des invariants mais aussi des *combinants* des trois fonctions quadratiques (Voir le mémoire de M. Sylvester, "On the Calculus of forms otherwise the theory of Invariants," § VII. *Camb. et Dub. Math. Journ.*, t. VIII. pp. 256—269 année 1853, équation (A.), p. 267). Pour expliquer la formation de la fonction C_6, il convient de considérer la fonction quadratique bi-ternaire

$$U = \left(\begin{array}{cccccc} a\ , & b\ , & c\ , & f\ , & g\ , & h \\ a'\ , & b'\ , & c'\ , & f'\ , & g'\ , & h' \\ a''\ , & b''\ , & c''\ , & f''\ , & g''\ , & h'' \\ A\ , & B\ , & C\ , & F\ , & G\ , & H \\ A'\ , & B'\ , & C'\ , & F'\ , & G'\ , & H' \\ A''\ , & B''\ , & C''\ , & F''\ , & G''\ , & H'' \end{array}\right)(x,\ y,\ z)^2\,(\xi,\ \eta,\ \zeta)^2$$

cette notation représentant la fonction

$$\begin{aligned}
&(a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h\ )(x,\ y,\ z)^2 \cdot \xi^2\\
+&(a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h')(x,\ y,\ z)^2 \cdot \eta^2\\
+&(a'',\ b'',\ c'',\ f'',\ g'',\ h'')(x,\ y,\ z)^2 \cdot \zeta^2\\
+&(A\ \ B\ ,\ C\ ,\ F\ ,\ G\ ,\ H\ )(x,\ y,\ z)^2 \cdot 2\eta\zeta\\
+&(A',\ B',\ C',\ F',\ G',\ H')(x,\ y,\ z)^2 \cdot 2\zeta\xi\\
+&(A'',\ B'',\ C'',\ F'',\ G'',\ H'')(x,\ y,\ z)^2 \cdot 2\xi\eta,
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned}
&(a\ x^2+b\ y^2+c\ z^2+2f\ yz+2g\ zx+2h\ xy)\,\xi^2\\
+&(a'\ x^2+b'\ y^2+c'\ z^2+2f'\ yz+2g'\ zx+2h'\ xy)\,\eta^2\\
+&(a''\ x^2+b''\ y^2+c''\ z^2+2f''yz+2g''zx+2h''xy)\,\zeta^2\\
+&(A\ x^2+B\ y^2+C\ z^2+2F\ yz+2G\ zx+2H\ xy)\,2\eta\zeta\\
+&(A'x^2+B'y^2+C'z^2+2F'yz+2G'zx+2H'xy)\,2\zeta\xi\\
+&(A''x^2+B''y^2+C''z^2+2F''yz+2G''zx+2H''xy)\,2\xi\eta.
\end{aligned}$$

Soit $\overline{123}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \partial_{x_1}, & \partial_{y_1}, & \partial_{z_1} \\ \partial_{x_2}, & \partial_{y_2}, & \partial_{z_2} \\ \partial_{x_3}, & \partial_{y_3}, & \partial_{z_3} \end{vmatrix},$$

et $\overline{1'2'3'}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \partial_{\xi_1}, & \partial_{\eta_1}, & \partial_{\zeta_1} \\ \partial_{\xi_2}, & \partial_{\eta_2}, & \partial_{\zeta_2} \\ \partial_{\xi_3}, & \partial_{\eta_3}, & \partial_{\zeta_3} \end{vmatrix},$$

et soient U_1, U_2, U_3 ce que devient U lorsqu'on y écrit x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1, ζ_1; x_2, y_2, z_2, ξ_2, η_2, ζ_2; x_3, y_3, z_3, ξ_3, η_3, ζ_3 au lieu de x, y, z, ξ, η, ζ; on a alors cet invariant (analogue à l'invariant quadratique d'une fonction binaire d'ordre pair), savoir:

$$\frac{1}{384}\,\overline{123}^2 \cdot \overline{1'2'3'}^2\, U_1 U_2 U_3$$

où comme à l'ordinaire les valeurs x, y, z, ξ, η, ζ sont rétablies après les différentiations au lieu de x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1, ζ_1, etc.

Je représente cet invariant par

$$\left\{\begin{matrix} a\ , & b\ , & c\ , & f\ , & g\ , & h \\ a', & b', & c', & f', & g'\ , & h' \\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \\ A\ , & B\ , & C\ , & F\ , & G\ , & H \\ A', & B', & C', & F', & G'\ , & H' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \end{matrix}\right\};$$

on voit sans peine que l'invariant peut être développé, et qu'alors il prend la forme

$$\left\{\begin{matrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ A, & B, & C, & F, & G, & H \\ A, & B, & C, & F, & G, & H \end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix} a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix} a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \end{matrix}\right\}$$

$$+2\left\{\begin{matrix} A, & B, & C, & F, & G, & H \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \end{matrix}\right\}$$

où le premier terme

$$\left\{\begin{matrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \end{matrix}\right\}$$

dénote la fonction

$$\begin{aligned} & ab'c'' + ab''c' + a'b''c + a'bc'' + a''bc' + a''b'c \\ & -2af'f'' - 2a'f''f - 2a''ff' \\ & -2bg'g'' - 2b'g''g - 2b''gg' \\ & -2ch'h'' - 2c'h''h - 2c''hh' \\ & +2fg'h'' + 2fg''h' + 2f'g''h + 2f'gh'' + 2f''gh' + 2f''g'h \end{aligned}$$

et de même pour les autres termes. L'invariant contient les termes

$$\begin{aligned} & ab'c'' + 2AB'C'' + 2fg'h'' + 4FG'H'' \\ & -2af'f'' - 2aBC + 2aF^2 \\ & -4AF'F'' + 4fAF - 4fGH, \end{aligned}$$

et on déduit de là son expression complète en y écrivant

$$ab'c'' + ab''c' + a'b''c + a'bc'' + a''bc' + a''b'c$$

au lieu de $ab'c''$;

$$af'f'' + a'f''f + a''ff' + bg'g'' + b'g''g + c''gg' + ch'h'' + c'h''h + c''hh'$$

au lieu de $af'f''$, et ainsi de suite; la somme des coefficients est $6 + 2.6 + 2.6 + 4.6 + 2.9 + 2.9 + 2.9 + 4.9 + 4.9 + 4.9 = 216$, ce qui est exacte, car il n'y a pas de termes qui se détruisent, et dans l'expression $\frac{1}{384}\overline{123}^2\,\overline{1'2'3'}^2\,U_1U_2U_3$, le nombre des termes qui composent le produit des deux déterminants carrés est $36 \times 36 = 1296$, chacun de ces termes est multiplié par le facteur $8 \times 8 = 64$ introduit par la différentiation, et l'on a

$$\frac{1}{384} \times 64 \times 1296 = 216.$$

L'invariant qui vient d'être donné est lié avec l'invariant T de M. Aronhold (lequel se rapporte à une fonction ternaire cubique). C'est pour cela que je le désigne par la même lettre T, et pour fixer sa valeur j'écris

$$2T = ab'c'' + \text{etc.}$$

Cela posé, je forme les deux combinants C_6 et C_{12} de la manière suivante.

Combinant du sixième ordre C_6. Soient U, V, W les trois fonctions quadratiques ternaires; considérez la fonction syzygétique $\lambda U + \mu V + \nu W$, où λ, μ, ν sont des quantités arbitraires; formez avec les variables ξ, η, ζ le reciprocant [1] (multiplié par 2) de cette fonction, le résultat sera de l'ordre 2 par rapport aux coefficients de U, V, W, de l'ordre 2 par rapport à λ, μ, ν, et de l'ordre 2 par rapport à ξ, η, ζ; c. à d. ce résultat sera une fonction quadratique bi-ternaire de λ, μ, ν et ξ, η, ζ dont l'invariant $2T$ (lequel sera par conséquent de l'ordre 6 par rapport aux coefficients de U, V, W) est le combinant C_6 qu'il s'agissait de trouver.

Combinant du douzième ordre C_{12}. Considérez comme auparavant la fonction syzygétique $\lambda U + \mu V + \nu W$, formez le discriminant (multiplié par 6) de cette fonction; le résultat sera de l'ordre 3 par rapport aux coefficients de U, V, W, et de l'ordre 3 par rapport à λ, μ, ν; c. à d. il sera une fonction cubique ternaire de λ, μ, ν, dont

[1] Le réciprocant de $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$ est

$$= -\begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \zeta \\ \xi, & a, & h, & g \\ \eta, & h, & b, & f \\ \zeta, & g, & f, & c \end{vmatrix}$$

$$= -(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H})(\xi, \eta, \zeta)^2.$$

l'invariant S de M. Aronhold [1] (lequel sera de l'ordre 12 par rapport aux coefficients de U, V, W) est le combinant C_{12} qu'il s'agissait de trouver.

On peut exprimer ces résultats d'une manière abrégée en disant que C_6 *est l'invariant* $2T$ *de la fonction bi-ternaire* $2R$ et que C_{12} *est l'invariant* S *de la fonction cubique ternaire* $6D$, en désignant par R et D le réciprocant et le discriminant de la fonction $\lambda U + \mu V + \nu W$.

Pour démontrer l'équation

$$12R = 16C_{12} - C_6^2$$

il suffit de faire voir que cette équation est vérifiée lorsqu'au lieu des trois fonctions données U, V, W on substitue trois fonctions de la forme $lU + mV + nW$, les coefficients l, m, n ayant été choisis de manière à simplifier autant que possible les expressions des trois fonctions. Il est facile de voir qu'il est permis de prendre pour les trois fonctions les formes dont s'est servi M. Sylvester dans son mémoire, savoir

$$\rho\,(x^2 - y^2),$$
$$\sigma\,(y^2 - z^2),$$
$$y^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Mais il suit des recherches de M. Hesse, et M. Sylvester aussi a depuis reconnu, qu'on peut prendre pour les trois fonctions les formes encore plus simples

$$x^2 + 2lyz,$$
$$y^2 + 2lzx,$$
$$z^2 + 2lxy,$$

qui se réduisent aux fonctions dérivées de la fonction cubique $x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$. Or, en prenant ces valeurs de U, V, W, on obtient

$$\lambda U + \mu V + \nu W = (\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \lambda l,\ \mu l,\ \nu l)\,(x,\ y,\ z)^2.$$

[1] Pour la fonction cubique ternaire

$$(a,\ b,\ c,\ i,\ j,\ k,\ i_1,\ j_1,\ k_1,\ l)\,(x,\ y,\ z)^3$$

l'invariant S est

$$\begin{aligned} = \ & l^4 \\ & -2l^2\,(jk_1 + ki_1 + ij_1) \\ & +3l\ \ (ijk + i_1j_1k_1) \\ & +\ l\ \ (aii_1 + bjj_1 + ckk_1) \\ & -\ l\ \ abc \\ & -\ \ (ii_1j_1k + jj_1k_1i + kk_1i_1j) \\ & +\ \ (j^2k_1{}^2 + k^2i_1{}^2 + i^2j_1{}^2) \\ & +\ \ (bcj_1k + cak_1i + abi_1j) \\ & -\ \ (ai^2j + bj^2k + ck^2i + ai_1{}^2k_1 + bj_1{}^2i_1 + ck_1{}^2j_1). \end{aligned}$$

Le réciprocant (multiplié par 2) est

$$= -2 \begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \zeta \\ \xi, & \lambda, & \nu l, & \mu l \\ \eta, & \nu l, & \mu, & \lambda l \\ \zeta, & \mu l, & \lambda l, & \nu \end{vmatrix},$$

lequel, en forme développée, donne le résultat

$$\begin{array}{llllllll}
(-2l^2\lambda^2 & . & . & +2\mu\nu & . & . &)\,\xi^2 \\
+(& . & -2l^2\mu^2 & . & . & +2\nu\lambda & . &)\,\eta^2 \\
+(& . & . & -2l^2\nu^2 & . & . & +2\lambda\mu &)\,\zeta^2 \\
+(-2l\lambda^2 & . & . & +2l^2\mu\nu & . & . &)\,2\zeta\eta \\
+(& . & -2l\mu^2 & . & . & +2l^2\nu\lambda & . &)\,2\xi\zeta \\
+(& . & . & -2l\nu^2 & . & . & +2l^2\lambda\mu &)\,2\eta\xi,
\end{array}$$

que l'on peut aussi exprimer comme fonction quadratique bi-ternaire, savoir:

$$\left(\begin{array}{cccccc} -2l^2 & . & . & 1 & . & . \\ . & -2l^2 & . & . & 1 & . \\ . & . & -2l^2 & . & . & 1 \\ -2l & . & . & l^2 & . & . \\ . & -2l & . & . & l^2 & . \\ . & . & -2l & . & . & l^2 \end{array}\right)(\lambda, \mu, \nu)^2 (\xi, \eta, \zeta)^2.$$

En représentant l'invariant $2T$ par le développement incomplet donné ci-dessus, on obtient dans le cas dont il s'agit

$$2T = \left\{\begin{array}{cccccc} -2l^2 & . & . & 1 & . & . \\ . & -2l^2 & . & . & 1 & . \\ . & . & -2l^2 & . & . & 1 \end{array}\right\}$$

$$- \left\{\begin{array}{cccccc} -2l^2 & . & . & 1 & . & . \\ -2l & . & . & l^2 & . & . \\ -2l & . & . & l^2 & . & . \end{array}\right\} - \text{etc. etc.}$$

$$+ 2 \left\{\begin{array}{cccccc} -2l & . & . & l^2 & . & . \\ . & -2l & . & . & l^2 & . \\ . & . & -2l & . & . & l^2 \end{array}\right\},$$

ce qui se réduit à la valeur finale

$$\begin{aligned}
&-8l^6+2\\
&-(4l^6+4l^3+4l^3)\\
&-(4l^6+4l^3+4l^3)\\
&-(4l^6+4l^3+4l^3)\\
&+2(-8l^3+2l^6)\\
=\;&2(1-20l^3-8l^6).
\end{aligned}$$

Les invariants S et T de la fonction cubique $x^3+y^3+z^3+6lxyz$ sont

$$S=-l+l^4,$$
$$T=1-20l^3-8l^6;$$

l'invariant $2T$ de la fonction quadratique bi-ternaire est donc précisément égal à $2T$, où T est l'invariant qui vient d'être donné, et on a

$$C_6=2T.$$

Le discriminant (multiplié par 6) de la fonction $\lambda U+\mu V+\nu W$ est

$$=6\begin{vmatrix} \lambda, & l\nu, & l\mu \\ l\lambda, & \mu, & l\lambda \\ l\mu, & l\nu, & \nu \end{vmatrix}$$

$$=6\{-l^2\lambda^3-l^2\mu^3-l^2\nu^3+(1+2l^3)\lambda\mu\nu\},$$

où la fonction en parenthèses est ce que devient le Hessien de la fonction cubique $x^3+y^3+z^3+6lxyz$, lorsqu'on y substitue λ, μ, ν au lieu de x, y, z. Son invariant S est

$$=(1+2l^3)\,216l^6+(1+2l^3)^4$$
$$=1+8l^3+240l^6+464l^9+16l^{4}.$$

Cette quantité est en même temps un invariant de la fonction cubique

$$x^3+y^3+z^3+6lxyz,$$

et comme tel elle doit s'exprimer en fonction des deux invariants S et T de cette dernière: en effet elle se réduit à

$$(1-20l^3-8l^6)^2-48(-l+l^4)^3=T^2-48S^3.$$

Nous avons donc

$$C_{12}=T^2-48S^3,$$

et comme nous venons de trouver

$$C_6=2T,$$

l'équation $12R=16C_{12}-C_6^{\,2}$ se réduit à

$$12R=16(T^2-48S^3)-4T^2$$
$$=12T^2-768S^3,$$

ou enfin à

$$R = T^2 - 64S^3,$$

équation qui fait voir que le résultant R dont il s'agit est effectivement égal à $R = (1 + 8l^3)^3$, c. à d. au discriminant de la fonction cubique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz,$$

ce qui donne la vérification du théorème général. Je m'étais servi d'abord d'une analyse moins simple, en considérant le cas dans lequel on prend pour les trois fonctions les formes

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2, \\ &z^2 - y^2, \\ &x^2 + y^2 + z^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy. \end{aligned}$$

Il vaut la peine, je crois, de donner les expressions correspondantes de C_6, C_{12}, R. On a ici à considérer la fonction

$$\lambda(x^2 - y^2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy) + \nu(z^2 - y^2),$$

laquelle peut s'écrire comme suit,

$$(\mu + \lambda,\ \mu - \lambda - \nu,\ \mu + \nu,\ l\mu,\ m\mu,\ n\mu)(x, y, z)^2.$$

Le réciprocant (multiplié par 2) est

$$= -2 \begin{vmatrix} & \xi & , \eta & , \zeta \\ \xi, & \mu + \lambda, & n\mu & , m\mu \\ \eta, & n\mu & , \mu - \lambda - \nu, & l\mu \\ \zeta, & m\mu & , l\mu & , \mu + \nu \end{vmatrix}$$

et en écrivant a, b, c, f, g, h au lieu de $1 - l^2$, $1 - m^2$, $1 - n^2$, $mn - l$, $nl - m$, $lm - n$, cette fonction est

$$\begin{aligned} = \quad & (2a\mu^2 - 2\lambda\mu - 2\nu\lambda - 2\nu^2)\,\xi^2 \\ & + (2b\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\mu\nu + 2\nu\lambda)\,\eta^2 \\ & + (2c\mu^2 - 2\nu\mu - 2\nu\lambda - 2\lambda^2)\,\zeta^2 \\ & + (2f\mu^2 - 2l\lambda\mu \qquad\qquad\quad)\,2\eta\zeta \\ & + (2g\mu^2 + 2m\lambda\mu + 2m\mu\nu \quad)\,2\zeta\xi \\ & + (2h\mu^2 - 2n\nu\mu \qquad\qquad\quad)\,2\xi\eta, \end{aligned}$$

ou, écrite en forme de fonction quadratique bi-ternaire,

$$= \left(\begin{array}{cccccc} 0, & 2a, & -2, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 2b, & 0, & 1, & 1, & 1 \\ -2, & 2c, & 0, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 2f, & 0, & 0, & 0, & -l \\ 0, & 2g, & 0, & m, & 0, & m \\ 0, & 2h, & 0, & -n, & 0, & 0 \end{array}\right)(\lambda, \mu, \nu)^2 (\xi, \eta, \zeta)^2.$$

En exprimant comme auparavant l'invariant $2T$ par une somme de cinq termes, on trouve sans peine que ces termes sont respectivement $18-4l^2-4m^2-4n^2$, $-4l^2$, $-4m^2$, $-4n^2$, 0; l'invariant sera donc $-8(l^2+m^2+n^2)+18$; et l'on a pour le combinant du sixième ordre

$$C_6=-8(l^2+m^2+n^2)+18.$$

Le discriminant (multiplié par 6) de la fonction $\lambda U+\mu V+\nu W$ est

$$=6\begin{vmatrix} \mu+\lambda, & n\mu & , & m\mu \\ n\mu & , & \mu-\lambda-\nu, & l\mu \\ m\mu & , & l\mu & , & \mu+\nu \end{vmatrix}$$

$$=0\lambda^3+6(1-l^2-m^2-n^2+2lmn)\mu^3+0\nu^3$$

$$+6(m^2-n^2)\mu^2\nu-6\nu^2\lambda-6\lambda^2\mu-6\mu\nu^2-6\nu\lambda^2+6(m^2-l^2)\lambda\mu^2-6\lambda\mu\nu$$

$$=\big(0,\ 6(1-l^2-m^2-n^2+2lmn),\ 0,\ 2(m^2-n^2), -2,\ -2,\ -2,\ -2,\ 2(m^2-l^2),\ -1\big)(\lambda,\ \mu,\ \nu)^3$$

$$=(a,\ b,\ c,\ i,\ j,\ k,\ i_1,\ j_1,\ k_1,\ l)(\lambda,\ \mu,\ \nu)^3,$$

où l'on a posé $a=0$, $b=6(1-l^2-m^2-n^2+2lmn)$, etc. L'invariant S de cette dernière fonction est

$$\begin{aligned}
= \quad & 1 \\
& -2\,(-4(m^2-l^2)+4-4(m^2-n^2)) \\
& -3\,(\quad 8(m^2-n^2) \qquad +8(m^2-l^2)) \\
& -4b \\
& +16(m^2-n^2)-16(m^2-n^2)(m^2-l^2)+16(m^2-l^2) \\
& +16(m^2-n^2)^2+16+16(m^2-l^2)^2 \\
& +16b \\
= \ & 9+12b+16(l^4+m^4+n^4-m^2n^2-n^2l^2-l^2m^2),
\end{aligned}$$

ou, si l'on substitue la valeur de b,

$$C_{12}=16(l^4+m^4+n^4-m^2n^2-n^2l^2-l^2m^2)$$
$$+144lmn-72(l^2+m^2+n^2)+81.$$

On vient de trouver

$$C_6=-8(l^2+m^2+n^2)+18,$$

équation qui donne

$$C_6^2=64(l^4+m^4+n^4+2m^2n^2+2n^2l^2+2l^2m^2)$$
$$-288(l^2+m^2+n^2)+324.$$

De ces résultats combinés on conclue

$$16C_{12} - C_6^2 = 192\,(l^4 + m^4 + n^4 - 2m^2n^2 - 2n^2l^2 - 2l^2m^2) + 2304lmn - 864\,(l^2 + m^2 + n^2) + 972.$$

Évidemment l'expression du résultant est, à un facteur numérique près,

$$R = (3 + 2l + 2m + 2n)\,(3 + 2l - 2m - 2n)\,(3 - 2l + 2m - 2n)\,(3 - 2l - 2m + 2n),$$

ou en réduisant

$$R = 16\,(l^4 + m^4 + n^4 - 2m^2n^2 - 2n^2l^2 - 2l^2m^2) + 192lmn - 72\,(l^2 + m^2 + n^2) + 81.$$

On retrouve donc

$$12R = 16C_{12} - C_6^2,$$

équation qu'il s'agissait de vérifier.

En terminant je remarque que la plus grande partie de ce mémoire est tirée d'un manuscrit daté "Machynlleth, 13 Août 1853."

Londres, 22 *Mars* 1859.