# 884.

## NOTE SUR LES SURFACES MINIMA ET LE THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL.

[From the *Comptes Rendus*, t. CVI. (1888), pp. 995, 996.]

I. La seule surface minima réglée est l'hélicoïde à plan directeur: ce beau théorème de M. Catalan se démontre par des considérations géométriques très simples.

Soit un système de droites ..., $P$, $Q$, $R$, ..., tel que, pour trois droites successives $P$, $Q$, $R$ quelconques, tout plan $\Pi'$ perpendiculaire à $Q$ rencontre les trois droites en des points $p'$, $q'$, $r'$, situés sur une droite. En particulier, si $qr$ est la distance la plus petite des droites $Q$ et $R$, le plan perpendiculaire $\Pi$, qui passe par le point $q$, passera par le point $r$ et rencontrera la droite $P$ en un point $p$, tel que les points $p$, $q$, $r$ seront sur une même droite $\Lambda$, perpendiculaire à chacune des droites $P$, $Q$, $R$; c'est-à-dire, chacune de ces droites rencontre perpendiculairement une seule et même droite $\Lambda$. Cela étant, pour que les points de rencontre $p'$, $q'$, $r'$ avec un autre plan $\Pi'$ soient sur la même droite, il faut encore une condition; et, en supposant (ce que l'on peut faire sans perte de généralité) que les distances $pq$, $qr$ soient égales, cette condition sera: que l'inclinaison des plans $(P\Lambda, Q\Lambda)$ est égale à l'inclinaison des plans $(Q\Lambda, R\Lambda)$.

En considérant de même les droites $Q$, $R$, $S$, on démontre d'abord que la droite $S$ rencontre perpendiculairement la droite $\Lambda$; puis, en supposant que les distances $qr$, $rs$ soient égales, on obtient la condition que l'inclinaison des plans $(Q\Lambda, R\Lambda)$ est égale à celle des plans $(R\Lambda, S\Lambda)$, et ainsi de suite: savoir, on obtient une série de droites ..., $P$, $Q$, $R$, ..., qui rencontrent perpendiculairement la droite $\Lambda$ et sont telles qu'en supposant que les distances ..., $pq$, $qr$, $rs$, ... soient égales, les inclinaisons ..., $(P\Lambda, Q\Lambda)$, $(Q\Lambda, R\Lambda)$, $(R\Lambda, S\Lambda)$, ... sont égales: c'est-à-dire, en considérant des droites ..., $P$, $Q$, $R$, $S$, ... consécutives, on a les génératrices d'une hélicoïde à plan directeur; et l'on voit ainsi que cette surface est la seule surface réglée, qui est telle que tout plan perpendiculaire à une génératrice quelconque rencontre la surface selon une courbe qui a, au point de rencontre avec la génératrice, une inflexion (ou, ce qui est la même chose, un rayon infini de courbure). Mais, comme l'avait remarqué M. Catalan, c'est là la condition pour que les deux rayons principaux de courbure soient égaux et opposés, ou enfin pour que la surface soit une surface minima.

II. Le théorème de Joachimsthal et aussi le théorème plus général de Bonnet et Serret, par rapport aux lignes de courbure planes ou sphériques, se déduisent immédiatement de ce théorème élémentaire de Géométrie: En considérant, dans des plans différents, deux triangles isoscèles $PP'O$ et $PP'N$ avec une base commune $PP'$ ($OP = OP'$ et $NP = NP'$), les angles $OPN$ et $OP'N$ seront égaux. En effet, si, pour une surface quelconque, $PP'$ est l'élément d'une courbe de courbure sphérique, les normales à la surface aux points $P$ et $P'$ se rencontrent dans un point $N$, et les rayons de la sphère aux mêmes points se rencontrent dans un point $O$; on a ainsi les deux triangles isoscèles $PP'O$ et $PP'N$, et de là les angles égaux $OPN$ et $OP'N$, c'est-à-dire que, pour deux points consécutifs $P$ et $P'$ de la ligne de courbure sphérique, l'inclinaison de la normale de la surface au rayon de la sphère a la même valeur, et cette inclinaison a ainsi la même valeur pour tous les points de la ligne de courbure. En prenant le point $O$ à l'infini, on obtient le théorème pour une ligne de courbure plane, ou, si l'on veut, le théorème pour ce cas se déduit directement de celui-ci: Une droite quelconque $PO$, perpendiculaire à la base $PP'$ d'un triangle isoscèle $PP'N$, est également inclinée sur les deux droites $PN$ et $P'N$.