252.

NOTE SUR L'ÉQUATION DES DIFFÉRENCES POUR UNE ÉQUATION DONNÉE DE DEGRÉ QUELCONQUE.

[From the *Annali di Matematica pura ed applicata* (Tortolini), tom. II. (1859), pp. 365, 366.]

Il s'agit de trouver l'équation qui a pour racines les carrés des différences des racines d'une équation donnée

$$(*)\,(v,\ 1)^n = 0.$$

En représentant cette équation par $\phi v = 0$, soient x, y deux racines différentes quelconques, on a non seulement $\phi x = 0$, $\phi y = 0$; mais aussi

$$\phi x + \phi y = 0,\ \frac{\phi x - \phi y}{x - y} = 0,$$

et en écrivant dans ces équations

$$x + y = 2s, \quad (x-y)^2 = 4\theta,$$

(ou ce qui est la même chose $x = s + \sqrt{\theta}$, $y = s - \sqrt{\theta}$) on obtient deux équations rationnelles en s, et θ, et en éliminant s on obtient l'équation qui donne

$$\theta = \tfrac{1}{4}(x-y)^2.$$

Il convient de changer un peu la forme des équations; en effet la première équation est du degré n, la seconde du degré $n-1$ pour rapport à s, mais en écrivant les deux équations sous la forme

$$n(\phi x + \phi y) - (x+y)\frac{\phi x - \phi y}{x - y} = 0, \qquad \frac{\phi x - \phi y}{x-y} = 0,$$

l'une et l'autre équation sera du degré $n-1$ par rapport à s. La forme sous laquelle j'ai présenté la méthode de Bezout s'applique au problème; en représentant les deux équations par $Fs=0$, $Gs=0$ j'écris pour le moment

$$\phi(s+\sqrt{\theta})=A, \quad \phi(s-\sqrt{\theta})=B,$$

on a alors

$$Fs=n(A+B)-s\frac{A-B}{\sqrt{\theta}}, \quad Gs=\frac{A-B}{\sqrt{\theta}},$$

et en écrivant

$$\phi(s'+\sqrt{\theta})=A', \quad \phi(s'-\sqrt{\theta})=B',$$

on a de même

$$Fs'=n(A'+B')-\frac{s'(A'-B')}{\sqrt{\theta}}, \quad Gs'=\frac{A'-B'}{\sqrt{\theta}}.$$

On obtient de là

$$\Phi(s, s')=\frac{Fs\,Gs'-Fs'Gs}{s-s'},$$

$$=\left[\left(n(A+B)-\frac{s(A-B)}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{A'-B'}{\sqrt{\theta}}-\left(n(A'+B')-\frac{s'(A'-B')}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{(A-B)}{\sqrt{\theta}}\right]\frac{1}{s-s'},$$

ou, en réduisant,

$$-\Phi(s, s')=\frac{2n(AB'-A'B)}{(s-s')\sqrt{\theta}}+\frac{(A-B)(A'-B')}{\theta}.$$

Donc, en rétablissant les valeurs de A, B, A', B', on a la fonction

$$\frac{2n[\phi(s+\sqrt{\theta})\phi(s'-\sqrt{\theta})-\phi(s'+\sqrt{\theta})\phi(s-\sqrt{\theta})]}{(s-s')\sqrt{\theta}}$$

$$+\frac{[\phi(s+\sqrt{\theta})-\phi(s-\sqrt{\theta})][\phi(s'+\sqrt{\theta})-\phi(s'-\sqrt{\theta})]}{\theta}$$

laquelle sera de la forme

$$\left(\begin{array}{llll} a_{0,0}, & a_{0,1}, & \ldots & a_{0,n-2} \\ a_{1,0}, & a_{1,1}, & \ldots & \\ \vdots & & & \\ a_{n-2,0}, & \ldots & & \end{array}\right)(s, 1)^{n-2}(s', 1)^{n-2},$$

où les coefficients a sont des fonctions rationnelles de θ, et en égalant à zero le déterminant formé avec ces coefficients on a l'équation qu'il s'agissait de trouver. Quoique cette solution soit analytiquement la plus simple, j'ai une autre méthode nouvelle plus adaptée au calcul, laquelle j'ai appliquée à trouver l'équation des différences pour l'équation quintique

$$(a, b, c, d, e, f\between v, 1)^5=0.$$

Londres, 4 *Fév.* 1860.