239.

ADDITION À LA NOTE SUR LA COMPOSITION DU NOMBRE 47 PAR RAPPORT AUX VINGT-TROISIÈMES RACINES DE L'UNITÉ.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (Crelle), tom. LVI. (1859), pp. 186—187: Sequel to **236**.]

M. KUMMER a bien voulu m'écrire une lettre où il remarque que le cube du facteur complexe du nombre 47, *multiplié par l'unité complexe convenable*, peut effectivement se décomposer en deux facteurs réciproques; c'est-à-dire qu'il existe une unité complexe $E(\alpha)$ telle que

$$E(\alpha)(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^3 = F(\alpha)\,F(\alpha^{-1}).$$

Pour $F(\alpha)$ M. Kummer a trouvé la valeur

$$F(\alpha) = \alpha^4+\alpha^5+\alpha^9+\alpha^{10}+\alpha^{16}-\alpha^{20}+\alpha^{22},$$

fonction qui par conséquent est l'un des 22 facteurs complexes de 47^3. Dans un postscriptum M. Kronecker m'a communiqué l'expression suivante de cette unité complexe

$$E(\alpha) = \frac{\alpha^2+\alpha^{21}}{(\alpha^8+\alpha^{15})(\alpha^9+\alpha^{14})(\alpha^{10}+\alpha^{13})^2(\alpha^{11}+\alpha^{12})}$$

équivalente à l'expression en fonction entière:

$$E(\alpha) = \begin{cases} -23\alpha+2\alpha^2-20\alpha^3-21\alpha^5-3\alpha^6-17\alpha^7-4\alpha^8-14\alpha^9-8\alpha^{10}-12\alpha^{11} \\ -23\alpha^{22}+2\alpha^{21}-20\alpha^{20}-21\alpha^{18}-3\alpha^{17}-17\alpha^{16}-4\alpha^{15}-14\alpha^{14}-8\alpha^{13}-12\alpha^{12}. \end{cases}$$

En supposant que cette valeur de $E(\alpha)$ soit connue, on trouve sans peine une condition à laquelle $F(\alpha)$ doit satisfaire. La valeur que j'ai donnée pour $(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^3$

contient le terme constant $+6$; en y ajoutant la quantité évanouissante $-6(1+\alpha+\ldots+\alpha^{22})$ elle se réduit à

$$\begin{cases} \alpha \;+\alpha^2 -3\alpha^3 +3\alpha^5 +10\alpha^7 +9\alpha^8 +3\alpha^9 +12\alpha^{19} +3\alpha^{11} \\ +\alpha^{22} +\alpha^{21} -3\alpha^{20} +3\alpha^{18} +10\alpha^{16} +9\alpha^{15} +3\alpha^{14} +12\alpha^{13} +3\alpha^{12} \end{cases}$$

et en multipliant cette valeur par $E(\alpha)$, le terme constant sera $+808$; donc en y ajoutant la quantité évanouissante $-808(1+\alpha+\ldots+\alpha^{22})$ on obtient

$$E(\alpha)(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^8+\alpha^{15}+\alpha^7+\alpha^{16})^3$$
$$=\begin{cases} -5\alpha \;-8\alpha^2 -7\alpha^3 -7\alpha^4 -4\alpha^5 -3\alpha^6 -7\alpha^7 -8\alpha^8 -7\alpha^9 -7\alpha^{10} -5\alpha^{11} \\ -5\alpha^{22} -8\alpha^{21} -7\alpha^{20} -7\alpha^{19} -4\alpha^{18} -3\alpha^{17} -7\alpha^{16} -8\alpha^{15} -7\alpha^{14} -7\alpha^{13} -5\alpha^{12}. \end{cases}$$

En représentant cette expression par $B'\alpha+C'\alpha^2+\ldots+K'\alpha^{22}$, j'écris

$$B'\alpha+C'\alpha^2+\ldots+K'\alpha^{22}$$
$$=(a+b\alpha+\ldots+k\alpha^{22})(a+b\alpha^{22}+\ldots+k\alpha)-(a^2+b^2+\ldots+k^2)(1+\alpha+\ldots+\alpha^{22}),$$

équation qui subsiste pour $\alpha=1$. On a donc

$$B'+C'+\ldots+K'=(a+b+\ldots+k)^2-23(a^2+b^2+\ldots+k^2),$$

ou, d'après les valeurs de B', C', ... K',

$$-136=(a+b+\ldots+k)^2-23(a^2+b^2+\ldots+k^2),$$

ce qui donne

$$(a+b+\ldots+k)^2\equiv-136 \quad (\text{mod. } 23).$$

On peut ajouter à $(a+b\alpha+\ldots+k\alpha^{22})$ un multiple quelconque de $(1+\alpha+\ldots+\alpha^{22})$ et changer le signe ; il est donc permis de prendre $(a+b+\ldots+k)$ positif et plus petit que $\frac{23}{2}$. Cela étant la congruence donne

$$a\;+b\;+\ldots+k=5$$

et on obtient alors

$$a^2+b^2+\ldots+k^2=7.$$

Au moyen de cette valeur l'équation à laquelle il faut satisfaire devient

$$7+2\alpha\;-\alpha^2\;+3\alpha^5+4\alpha^6-\alpha^8\;+2\alpha^{11}$$
$$+2\alpha^{22}-\alpha^{19}+3\alpha^{18}+4\alpha^{17}-\alpha^{15}+2\alpha^{12}$$
$$=(a+b\alpha\ldots+k\alpha^{22})(a+b\alpha^{22}\ldots+k\alpha).$$

À cause des coefficients numériques négatifs, les coefficients cherchés a, b, ... k ne peuvent pas être tous à la fois positifs; et cela étant il n'y a qu'une seule manière de satisfaire aux deux conditions ci-dessus écrites, savoir il faut donner à sept des coefficients a, b, ... k les valeurs 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, et aux autres coefficients la valeur zéro ; l'expression

$$F(\alpha)=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^9+\alpha^{10}+\alpha^{16}-\alpha^{20}+\alpha^{22}$$

s'accorde en effet avec cette conclusion.

Londres, le 6 *Octobre*, 1858.