237.

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS GAUCHES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* (Crelle), tom. LV. (1858), pp. 277—278.]

DANS le mémoire intitulé "Recherches ultérieures sur les déterminants gauches," ce journal t. L. pp. 299—313 (1855), [137], j'ai donné une formule pour le développement d'un déterminant gauche bordé; mais j'ai omis de remarquer un cas particulier assez important. La formule générale se rapporte à un déterminant tel que:

$$\overline{\alpha 123 \mid \beta 123} = \begin{vmatrix} \alpha\beta, & \alpha 1, & \alpha 2, & \alpha 3 \\ 1\beta, & 11, & 12, & 13 \\ 2\beta, & 21, & 22, & 23 \\ 3\beta, & 31, & 32, & 33 \end{vmatrix},$$

que l'on obtient en bordant d'une manière quelconque la matrice gauche

$$\begin{pmatrix} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23 \\ 31, & 32, & 33 \end{pmatrix}.$$

On a par exemple:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha 123 \mid \beta 123} = \; & \alpha\beta \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, 33 \\ & + \alpha\beta \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 33 \\ & + \alpha\beta \,.\, 13 \,.\, 13 \,.\, 22 \\ & + \alpha\beta \,.\, 23 \,.\, 23 \,.\, 11 \\ & + \alpha 1 \,.\, \beta 1 \,.\, 22 \,.\, 33 \\ & + \alpha 2 \,.\, \beta 2 \,.\, 11 \,.\, 33 \\ & + \alpha 3 \,.\, \beta 3 \,.\, 11 \,.\, 22 \\ & + \alpha 123 \,.\, \beta 123, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha 1234 \mid \beta 1234} = \;& \alpha\beta \,.\, 11 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, 44 \\ & + \alpha\beta \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 33 \,.\, 44 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha\beta 1234 \,.\, 1234 \\ & + \alpha 1 \,.\, \beta 1 \,.\, 22 \,.\, 33 \,.\, 44 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha 123 \,.\, \beta 123 \,.\, 44 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha 234 \,.\, \beta 234 \,.\, 11\end{aligned}$$

où les expressions $\alpha\beta 12$, $\alpha\beta 13$ etc. sont des Pfaffiens. Cela étant, le déterminant formé en bordant d'une manière quelconque une matrice gauche et symétrique peut se nommer déterminant gauche et symétrique bordé, et la formule fait voir qu'un déterminant de cette espèce se réduit toujours au produit de deux Pfaffiens. En effet, en écrivant dans les exemples $11 = 22 = 33 = 44 = 0$, on obtient:

$$\overline{\alpha 123 \mid \beta 123} = \alpha 123 \,.\, \beta 123,$$

$$\overline{\alpha 1234 \mid \beta 1234} = \alpha\beta 1234 \,.\, 1234,$$

et de même pour un déterminant gauche et symétrique bordé quelconque, suivant que l'ordre du déterminant est pair ou impair. Je remarque à propos de cela, que dans le cas d'un déterminant d'ordre pair, le terme $\alpha\beta$ est multiplié par un mineur premier lequel (comme déterminant gauche et symétrique d'ordre impair) se réduit à zéro ; le déterminant ne contient donc pas ce terme $\alpha\beta$, et sera par conséquent fonction linéo-linéaire des quantités $\alpha 1$, $\alpha 2$, etc. et 1β, 2β, etc. ; de manière qu'on ne saurait être surpris de voir ce déterminant se présenter sous la forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est fonction linéaire de $\alpha 1$, $\alpha 2$, etc. et l'autre fonction linéaire de 1β, 2β, etc. Mais pour un déterminant d'ordre impair, le coefficient du terme $\alpha\beta$ ne se réduit pas à zéro ; en supposant donc que le déterminant puisse s'exprimer comme produit de deux facteurs, il est nécessaire que l'un de ces facteurs soit (comme le déterminant même) fonction linéaire de $\alpha\beta$ et linéo-linéaire de $\alpha 1$, $\alpha 2$, etc. et 1β, 2β, etc. ; de cette manière on se rend compte de la différence de la forme des facteurs, qui a lieu dans les deux cas dont il s'agit.

En écrivant $\beta = \alpha$ (ce qui implique $\alpha\alpha = 0$, car on suppose toujours $\alpha\beta = -\beta\alpha$) le déterminant gauche et symétrique bordé se réduit à un déterminant gauche et symétrique ordinaire, de plus le Pfaffien $\alpha\beta 1234$ se réduit à zéro, et les équations deviennent :

$$\overline{\alpha 123 \mid \alpha 123} = (\alpha 123)^2,$$

$$\overline{\alpha 1234 \mid \alpha 1234} = 0\,;$$

savoir, quand l'ordre est pair, le déterminant se réduit au carré d'un Pfaffien, et quand l'ordre est impair, le déterminant s'évanouit ; ce qui est en effet la propriété fondamentale des déterminants gauches et symétriques.

2 *Stone Buildings, Londres, le* 16 *Nov.* 1857.