337.

NOTE SUR LA RÉALITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXI. (1863), pp. 367—368.]

À PROPOS du mémoire que vient de publier M. Hesse (voir ce *Journal* t. LX., p. 305) je remarque que si l'une ou l'autre des deux formes

$$(a, b, c, f, g, h \between\ )^2, \quad (a', b', c', f', g', h' \between\ )^2$$

est une forme *définie* (forme qui conserve toujours le même signe pour des valeurs réelles quelconques des variables), l'équation suivante en λ:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda a', & h-\lambda h', & g-\lambda g', & x \\ h-\lambda h', & b-\lambda b', & f-\lambda f', & y \\ g-\lambda g', & f-\lambda f', & c-\lambda c', & z \\ x, & y, & z & \end{vmatrix} = 0$$

aura ses deux racines réelles. En écrivant

$$\begin{aligned} &A = bc - f^2, \quad A' = b'c' - f'^2, \quad A_1 = bc' + b'c - 2ff', \\ &B = ca - g^2, \ \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

de manière que $(A, B, C, F, G, H \between\ )^2$ dénote la forme adjointe (ou réciproque) de $(a, b, c, f, g, h \between\ )^2$, cette équation prend la forme

$$(A, \ldots \between x, y, z)^2 - \lambda (A_1, \ldots \between x, y, z)^2 + \lambda^2 (A', \ldots \between x, y, z)^2 = 0,$$

et les racines étant réelles, on doit avoir

$$\square = -4 (A, \ldots \between x, y, z)^2 (A', \ldots \between x, y, z)^2 + [(A_1, \ldots \between x, y, z)^2]^2 = +\,.$$

Or pour démontrer directement cette proposition, il n'est pas ce me semble possible d'exprimer $\square$ comme une somme de carrés; on a besoin de considérer une forme plus génerale, savoir une somme de carrés multipliés chacun par un coefficient litéral positif. Par exemple, en ne faisant attention qu'au coefficient de x^4, on doit avoir

$$\square_0 = -4(bc-f^2)(b'c'-f'^2) + (bc'+b'c-2ff')^2 = +.$$

Pour en faire la démonstration, on peut exprimer $\square_0$ sous la forme

$$\square_0 = (bc'-b'c)^2 + 4(bf'-b'f)(cf'-c'f),$$

ce qui donne

$$bc\square_0 = (bc-f^2)(bc'-b'c)^2 + [b(cf'-c'f)+c(bf'-b'f)]^2.$$

En effet, en y substituant la seconde expression de $\square_0$, on a l'identité

$$4bc(bf'-b'f)(cf'-c'f) = -f^2(bc'-b'c)^2 + [b(cf'-c'f)+c(bf'-b'f)]^2$$

et l'expression pour $bc\square_0$ est ainsi démontrée. Mais en supposant que $(a, b, c, f, g, h)(\,,\,)^2$ soit une forme définie, on a $bc-f^2=+$, donc aussi $bc=+$, et $bc\square_0 = (bc-f^2)X^2+Y^2=+$, donc enfin $\square_0=+$. Il serait assez intéressant de trouver une démonstration pareille pour l'expression générale de $\square$.

Londres, 23^{ième} *Octobre* 1862.