336.

NOTE SUR L'ÉLIMINATION.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LX. (1861), pp. 373—374.]

SOIENT $U=(a, \ldots)(x, y)^m$, $V=(b, \ldots)(x, y)^n$ des fonctions homogènes quelconques des degrés m et n respectivement. Dénotons par $(x, y)^\phi$ la suite entière ou seulement une partie de la suite de termes $x^\phi, x^{\phi-1}y, \ldots y^\phi$, et en prenant $\theta \gtreqless m \gtreqless n$, formons le déterminant

$$\{(x, y)^{\theta-m}\,U,\ (x, y)^{\theta-n}\,V\}.$$

Cette notation signifie qu'en supposant les suites $(x, y)^{\theta-m}\,U$, $(x, y)^{\theta-n}\,V$ composées respectivement de p et de q termes et qu'en posant $p+q=s$ on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} (x_1, y_1)^{\theta-m}\,U_1, & (x_1, y_1)^{\theta-n}\,V_1 \\ \vdots & \vdots \\ (x_s, y_s)^{\theta-m}\,U_s, & (x_s, y_s)^{\theta-n}\,V_s \end{vmatrix}$$

dans lequel les différentes lignes (chacune composée de s termes) sont ce que deviennent $(x, y)^{\theta-m}\,U$, $(x, y)^{\theta-n}\,V$, lorsqu'on y substitue (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots (x_s, y_s)$ successivement au lieu de (x, y).

Le déterminant que je viens définir est divisible par le déterminant

$$\{(x, y)^{s-1}\},$$

notation qui est équivalente à :

$$\begin{vmatrix} (x_1, y_1)^{s-1} \\ \vdots \\ (x_s, y_s)^{s-1} \end{vmatrix}$$

et dans laquelle $(x, y)^{s-1}$ dénote la suite entière des termes $x^{s-1}, x^{s-2}y, \dots y^{s-1}$. Nous obtenons ainsi une équation

$$\frac{\{(x, y)^{\theta-m} U, (x, y)^{\theta-n} V\}}{\{(x, y)^{s-1}\}} = (a, \dots)^p (b, \dots)^q (x_1, y_1)^{\theta-s+1} \dots (x_s, y_s)^{\theta-s+1},$$

c.-à-d. que le quotient est du degré p par rapport aux coefficients $(a, \dots)$, du degré q par rapport aux coefficients $(b, \dots)$, et du degré $\theta - s + 1$ par rapport à chaque système de variables $(x_1, y_1), \dots (x_s, y_s)$. Or en supposant $U_1 = 0$, $V_1 = 0$, on obtient

$$0 = (a, \dots)^p (b, \dots)^q (x_1, y_1)^{\theta-s+1} \dots (x_s, y_s)^{\theta-s+1},$$

équation qui subsiste quelles que soient les valeurs des variables $(x_2, y_2), \dots (x_s, y_s)$; cela donne une suite de $(\theta - s + 2)^{s-1}$ équations chacune de la forme

$$0 = (a, \dots)^p (b, \dots)^q (x_1, y_1)^{\theta-s+1}.$$

En considérant un système quelconque de $\theta - s + 2$ de ces équations, pour en éliminer tous les termes de $(x_1, y_1)^{\theta-s+1}$, on obtiendra ou l'équation identique $0 = 0$, ou une équation de la forme

$$F = (a, \dots)^{p(\theta-s+2)} (b, \dots)^{q(\theta-s+2)} = 0$$

où F sera un déterminant de l'ordre $\theta - s + 2$, chaque terme étant de la forme $(a, \dots)^p (b, \dots)^q$.

Cela posé il est évident que F contiendra comme facteur la fonction

$$\square = (a, \dots)^n (b, \dots)^m$$

qui est le résultant des deux équations $U = 0$, $V = 0$. En particulier, on aura les deux cas que voici:

1°. Soit $\theta = m + n - 1$, et supposons que $(x, y)^{n-1} U$, $(x, y)^{m-1} V$, dénotent les suites entières

$$x^{n-1} U, x^{n-2} y U, \dots y^{n-1} U; \; x^{m-1} V, x^{m-2} y V, \dots y^{m-1} V,$$

nous aurons $p = n$, $q = m$, $s = m + n$, $\theta - s + 2 = 1$, et de là

$$F = (a, \dots)^n (b, \dots)^m,$$

donc $F = \square$. On voit sans peine que l'on obtient de cette manière le résultant $\square$, sous la forme d'un déterminant de l'ordre $m + n$, le même que l'on obtient en éliminant les termes de $(x, y)^{m+n-1}$ entre les équations $(x, y)^{n-1} U = 0$, $(x, y)^{m-1} V = 0$.

2°. En supposant $m \overline{\gt} n$, on peut prendre $\theta = m$, ce qui donne pour $(x, y)^{\theta-m} U$ le seul terme U. Réduisons aussi $(x, y)^{\theta-n} V$ au seul terme $x^\alpha y^{m-n-\alpha} V$ (α désignant un nombre entier arbitraire entre 0 et $m-n$), c.-à-d. au terme $x^{m-n}V$ ou $y^{m-n}V$ dans le cas des deux valeurs extrèmes de α. On a ainsi $p=1$, $q=1$, $s=2$, et delà

$$F=(a, \ldots)^m (b, \ldots)^n.$$

Donc $F=(a, \ldots)^{m-n}\square$, c.-à-d. que l'on obtient le résultant $\square$ affecté d'un facteur $(a, \ldots)^{m-n}$ qui ne contient que les coefficients de U, et qui est de l'ordre $m-n$ par rapport à ces coefficients. L'expression de ce facteur peut être trouvée assez facilement. Dans le cas du terme $x^{m-n}V$, c.-à-d. pour $\alpha=m-n$, le facteur sera k^{m-n} (k désignant le dernier coefficient de la suite $(a, \ldots)$), et dans le cas du terme $y^{m-n}V$, c.-à-d. pour $\alpha=0$, le facteur sera a^{m-n}. Mais en supposant $m=n$ on a tout simplement $F=\square$, c.-à-d. que l'on obtient le résultant sans facteur étranger. C'est sous cette dernière forme que j'ai présenté la méthode abregée de *Bezout* dans le tome LIII. p. 366 (1857) de ce Journal, [230].

Londres, 17^{ième} *Décembre,* 1861.