# 307.

## NOTE SUR LES FONCTIONS al $(x)$, &c., DE M. WEIERSTRASS.

[From the *Journal de Mathématiques* (Liouville), tom. VII. (1862), pp. 137—142.]

LES fonctions al $(x)$, al $(x)_1$, al $(x)_2$, al $(x)_3$ de M. Weierstrass satisfont respectivement aux équations

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \operatorname{al}(x)}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \operatorname{al}(x)}{dk} + \qquad k^2x^2 \operatorname{al}(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)_1}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \operatorname{al}(x)_1}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \operatorname{al}(x)_1}{dk} + (k'^2 + k^2x^2) \operatorname{al}(x)_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)_2}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \operatorname{al}(x)_2}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \operatorname{al}(x)_2}{dk} + (1 + k^2x^2) \operatorname{al}(x)_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)_3}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \operatorname{al}(x)_3}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \operatorname{al}(x)_3}{dk} + (k^2 + k^2x^2) \operatorname{al}(x)_3 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, les fonctions

$$\operatorname{al}(x), \quad \sqrt{k} \operatorname{al}(x)_1, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} \operatorname{al}(x)_2, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} \operatorname{al}(x)_3,$$

satisfont chacune à l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2k^2 x \frac{dz}{dx} + 2kk'^2 \frac{dz}{dk} + k^2x^2 z = 0.$$

Écrivons pour un moment $\xi$, $\kappa$ au lieu de $x$, $k$; les fonctions al $(\xi)$, etc., satisfont à l'équation

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + 2\kappa^2 \xi \frac{dz}{d\xi} + 2\kappa\kappa'^2 \frac{dz}{d\kappa} + \kappa^2 \xi^2 z = 0.$$

Cela étant, en posant

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{k}}, \quad \kappa = k,$$

on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{dz}{d\xi}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{k} \frac{d^2z}{d\xi^2}, \quad \frac{dz}{dk} = -\frac{x}{2k\sqrt{k}} \frac{dz}{d\xi} + \frac{dz}{d\kappa},$$

et de là

$$\frac{dz}{d\xi} = \sqrt{k} \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{d\xi^2} = k \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{dz}{d\kappa} = \frac{dz}{dk} + \frac{x}{2k} \frac{dz}{dx}.$$

L'équation différentielle devient ainsi

$$k \frac{d^2z}{dx^2} + 2k^2x \frac{dz}{dx} + 2kk'^2 \left( \frac{dz}{dk} + \frac{x}{2k} \frac{dz}{dx} \right) + kx^2z = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1+k^2}{k} x \frac{dz}{dx} + 2k'^2 \frac{dz}{dk} + x^2z = 0,$$

équation qui sera ainsi satisfaite par

$$\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \sqrt{k}\, \mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_1, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\, \mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_2, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\, \mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_3.$$

Or en écrivant

$$k + \frac{1}{k} = \alpha,$$

l'équation en $z$ devient

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha x \frac{dz}{dx} - 2(\alpha^2 - 4) \frac{dz}{d\alpha} + x^2z = 0,$$

laquelle est ce que devient celle-ci

$$(2) \quad (1 - \alpha x^2 + x^4) \frac{d^2z}{dx^2} + (n-1)(\alpha x - 2x^3) \frac{dz}{dx} - 2n(\alpha^2 - 4) \frac{dz}{d\alpha} + n(n-1) x^2z = 0,$$

en y écrivant $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de $x$, et puis $n = \infty$. L'équation (2), trouvée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. IV. p. 185, 1829), a la propriété que voici, savoir en posant

$$\alpha = k + \frac{1}{k}, \quad x = \sqrt{k} \sin \mathrm{am}\, u,$$

alors l'équation est satisfaite en prenant pour $z$ soit le numérateur, soit le dénominateur, de la fonction rationnelle de $x$ qui donne la valeur de la fonction $\sqrt{\lambda} \sin \mathrm{am}\left(\dfrac{\mu}{M}, \lambda\right)$, où $\lambda$, $M$ sont le module et le multiplicateur qui correspondent à la transformation de l'ordre $n$ ($n$ étant un nombre impair quelconque).

L'équation fut donnée par Jacobi sans démonstration. Je l'ai démontrée (*Camb. and Dubl. Math. Journal,* t. II. p. 256, 1847, [45]) de la manière que voici, savoir en écrivant

$$z=\left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\Theta^{-n}(u)\,.\,\Sigma,$$

on obtient pour $\Sigma$ l'équation

$$\frac{d^2\Sigma}{du^2}-2nu\left(k'^2-\frac{E}{K}\right)\frac{d\Sigma}{du}+2nkk'^2\frac{d\Sigma}{dk}=0.$$

Cette équation, en prenant

$$\omega=\frac{n\pi K'}{K},\quad v=\frac{n\pi u}{2K},$$

devient

$$\frac{d^2\Sigma}{dv^2}-4\frac{d\Sigma}{d\omega}=0,$$

équation mentionnée par Jacobi, laquelle est satisfaite par

$$\Sigma=\Theta\left(nu,\ \frac{nK'}{K}\right),\ \text{ou}\ \Sigma=\mathrm{H}\left(nu,\ \frac{nK'}{K}\right);$$

cela donne pour $z$ deux valeurs qui sont le dénominateur et le numérateur de la fraction dont il s'agit. J'ose croire que ce doit être à peu près de cette manière que l'équation fut trouvée par Jacobi.

Or les solutions en question de l'équation (1) peuvent être trouvées au moyen de l'équation de Jacobi; pour cela, au lieu des valeurs ci-dessus données de $\omega$, $v$, j'écris

$$\omega=\frac{\pi K'}{K},\quad v=\frac{\sqrt{n}\pi u}{2K},$$

ce qui conduit à la même équation

$$\frac{d^2\Sigma}{dv^2}-4\frac{d\Sigma}{d\omega}=0,$$

laquelle sera ainsi satisfaite par

$$\Sigma=\Theta\left(\sqrt{n}u,\ \frac{K'}{K}\right),\quad \Sigma=\mathrm{H}\left(\sqrt{n}u,\ \frac{K'}{K}\right),$$

ou, ce qui est la même chose, par

$$\Sigma=\Theta\,(\sqrt{n}u),\qquad \Sigma=\mathrm{H}\,(\sqrt{n}u).$$

L'équation (2) sera donc satisfaite par

$$z=\left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\Theta^{-n}(u)\,\Theta\,(\sqrt{n}u),$$

ou, en se souvenant que $\Theta(0) = \sqrt{\dfrac{2Kk'}{\pi}}$, par

$$z = \frac{\Theta(\sqrt{n}u)}{\Theta(0)} \cdot \frac{\Theta^n(0)}{\Theta^n(u)}.$$

Or en écrivant $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de $x$, pour faire ensuite $n = \infty$, nous avons

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = \sqrt{k}\sin\operatorname{am} u,$$

équation qui se réduit à

$$u = \frac{x}{\sqrt{nk}};$$

cela donne

$$\Theta(\sqrt{n}u) = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \Theta^n u = \Theta^n(0)\, e^{\frac{1}{2}nu^2\left(1-\frac{E}{K}\right)} = \Theta^n(0)\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)},$$

puisque

$$\Theta(u) = \Theta(0)\, e^{\frac{1}{2}u^2\left(1-\frac{E}{K}\right) - k^2\int_0 du\int_0 du \sin^2\operatorname{am} u};$$

et $n\int_0 du\int_0 du\sin^2\operatorname{am} u$, en y substituant $u = \dfrac{x}{\sqrt{nk}}$, contient le facteur $\dfrac{1}{n}$ et se réduit ainsi à zéro. Donc on obtient

$$z = \frac{\Theta\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)}$$

comme solution de l'équation (1), qui se déduit de l'équation (2) en y écrivant $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de $x$ et puis $n = \infty$. Et cette valeur de $z$ est précisément la fonction al$\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)$ de M. Weierstrass. On obtient de même la solution

$$z = \frac{\mathrm{H}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$z = \frac{\mathrm{H}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{H}'(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)},$$

qui est la fonction $\sqrt{k}\,\mathrm{al}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)_1$. Et d'une manière semblable les solutions

$$z = \frac{\mathrm{H}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}} + K\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)}, \quad z = \frac{\Theta\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}} + K\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)}$$

qui sont les fonctions $\sqrt{\dfrac{k}{k'}}\,\mathrm{al}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)_2$, $\dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{al}\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)_3$.

J'ajoute que dans le Mémoire cité (1847) j'ai donné la suite

$$z = C_0 + C_1 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + C_2 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

où

$$\begin{aligned}
C_0 &= \quad 1, \\
C_1 &= \quad 0, \\
C_2 &= - \quad 2, \\
C_3 &= + \quad 8\alpha, \\
C_4 &= - \quad 32\alpha^2 - \quad 4, \\
C_5 &= + \ 128\alpha^3 + \quad 96\alpha, \\
C_6 &= - \ 512\alpha^4 - \ 960\alpha^2 - \ 408, \\
C_7 &= + 2048\alpha^5 + 7168\alpha^3 + 7584\alpha, \\
C_8 &= - 8192\alpha^6 - 46080\alpha^4 - 88320\alpha^2 - 15384, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

de façon qu'en général

$$C_{r+2} = -(2r+1)(2r+2)\,C_r - (2r+2)\,\alpha C_{r+1} + 2(\alpha^2 - 4)\frac{dC_{r+1}}{d\alpha},$$

c'est le développement de M. Weierstrass pour la fonction al $\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$: seulement je ne connaissais pas alors l'expression finie

$$\text{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Theta(0)}\,\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) e^{\frac{x^2}{2k}\left(1 - \frac{E}{K}\right)}$$

de cette suite. Je remarque en passant que pour $\alpha = 2$, la suite se réduit à

$$e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$