305.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES COURBES EN ESPACE. COURBES DU CINQUIÈME ORDRE.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LVIII. (*Janvier—Juin*, 1864), pp. 994—1000. Continuation of **302**.]

En considérant une courbe du $m^{ième}$ ordre représentée au moyen des équations

$$U=0, \quad w=\frac{P}{Q},$$

qui dénotent respectivement un cône du $m^{ième}$ ordre et une surface monoïde du $p^{ième}$ ordre, le cône doit passer $m(p-1)$ fois par les $p(p-1)$ droites $(P=0, Q=0)$ de la monoïde. J'indique la manière de ce passage au moyen d'un symbole que je nomme la *signature* du système; ce symbole, composé ordinairement des numéros 2, 1, 0, ensemble $p(p-1)$ numéros, fait voir combien des $p(p-1)$ droites de la monoïde sont, par rapport au cône, des droites doubles, des droites simples, ou des droites qui ne sont pas situées sur le cône: par exemple, $m=5$, $p=3$, la signature 222211 fait voir qu'il y a quatre droites doubles, deux droites simples; la signature 222220, qu'il y a cinq droites doubles, une droite qui n'est pas située sur le cône.

Je reviens aux courbes du cinquième ordre; j'ai établi (t. LIV. p. 672) qu'il y a cinq espèces de ces courbes, à savoir:

			P. D. A.
Courbe plane	ou espèce	5	0
Courbe quadricubique	„	$6-1$	4
Courbe quadriquartique	„	$8-3$	6
Courbe cubicubique (deux espèces)	„	$\begin{cases} 9-3-1 \\ 9-6+2 \end{cases}$	6 5

Je fais abstraction de la courbe plane, et je cherche à rattacher les quatre autres espèces à la théorie de la surface monoïde. Pour cela je remarque qu'en prenant pour sommet du cône et de la surface monoïde un point *quelconque*, la surface monoïde (ne pouvant pas être de l'ordre 2) sera de l'ordre 3 ou 4.

Je considère d'abord le cas d'une monoïde cubique: la signature sera 222211 ou 222220.

Monoïde cubique, signature 222211.—Ici le cône $U=0$ passe par les six droites de la monoïde; donc U est fonction syzygétique de P et Q: autrement dit, on peut trouver P' et Q' fonctions homogènes de (x, y, z) de manière à avoir identiquement $U=PQ'-P'Q$: P et Q sont des ordres 3 et 2 respectivement, donc P' et Q' seront aussi des ordres 3 et 2 respectivement. En combinant les équations

$$U=PQ'-P'Q=0,\quad w=\frac{P}{Q},$$

on obtient

$$w=\frac{P'}{Q'},$$

ou plus généralement

$$w=\frac{P+\alpha P'}{Q+\alpha Q'}$$

(où α est un paramètre arbitraire); mais en écrivant cette équation sous la forme $(Qw+P)+\alpha(Q'w-P')=0$, on voit que les monoïdes cubiques que représente cette équation sont toutes en involution avec les deux monoïdes cubiques $Qw-P=0$, $Q'w-P'=0$; on peut donc dire qu'il y a dans le cas dont il s'agit *deux* monoïdes cubiques.

Monoïde cubique, signature 222220.—Ici le cône ne passe pas par les six droites de la monoïde, donc il n'existe pas d'équation identique telle que $U=PQ'-P'Q$, et la monoïde $w=\frac{P}{Q}$ est la seule monoïde cubique.

Je passe au cas d'une monoïde quartique; la signature sera

222111111111, ou 222211111110, ou 222221111100, ou 222222111000.

Monoïde quartique, signature 222111111111.—Le cône $U=0$ passe ici par toutes les douze droites de la monoïde, c'est-à-dire on aurait identiquement $U=PQ'-P'Q$, où P, Q seraient des fonctions homogènes de (x, y, z) des ordres 2 et 1 respectivement, et il y aurait une monoïde *quadrique* $w=\frac{P'}{Q'}$. Ce cas n'existe donc pas.

Monoïde quartique, signature 222211111110.—Le cône $U=0$ passe par toutes les douze droites de la monoïde, hormis une seule droite; donc en écrivant $M=0$ pour l'équation d'un plan quelconque par cette droite exceptée, le cône $MU=0$ passe par les douze droites de la monoïde: on a donc identiquement $MU=PQ'-P'Q$, où P', Q'

sont des ordres 3 et 2 respectivement, et il passe par la courbe la monoïde cubique $w=\frac{P'}{Q'}$; de plus M contient une constante arbitraire ($M=K+\alpha L$, en prenant $K=0$, $L=0$ pour les équations de deux plans qui passent chacun par la droite mentionnée); donc P', Q' contiennent aussi cette constante arbitraire, autrement dit il y a *deux* monoïdes cubiques. Cela rentre donc dans le cas, monoïde cubique, signature 222211.

Monoïde quartique, signature 222221111100.—Le cône $U=0$ passe par toutes les droites de la monoïde, hormis deux droites; donc en écrivant $M=0$ pour l'équation du plan passant par ces deux droites, le cône $MU=0$ contient toutes les droites; on a donc identiquement $MU=PQ'-P'Q$, où P', Q' sont des ordres 3 et 2 respectivement, et il passe par la courbe la monoïde cubique $w=\frac{P'}{Q'}$. Mais ici $M=0$ est un plan déterminé; donc P' et Q' sont aussi des fonctions déterminées, et il n'y a qu'une seule monoïde cubique. Cela rentre dans le cas, monoïde cubique, signature 222220.

Monoïde quartique, signature 222222111000.—Le cône $U=0$ passe par toutes les droites de la monoïde, hormis trois droites; donc en prenant $M=0$ pour l'équation d'un cône quadrique quelconque qui passe par les droites exceptées, le cône $MU=0$ passe par toutes les droites. On a donc identiquement $MU=PQ'-P'Q$, où P', Q' sont des ordres 4 et 3 respectivement. Cela donne la monoïde quartique $w=\frac{P'}{Q'}$. Mais M contient trois constantes arbitraires: il y a donc trois nouvelles monoïdes quartiques $w=\frac{P'}{Q'}$, $w=\frac{P''}{Q''}$, $w=\frac{P'''}{Q'''}$, ou en tout quatre monoïdes quartiques.

On démontre sans peine que pour l'espèce $6-1$, il y a deux monoïdes cubiques, pour l'espèce $9-6+2$ une seule monoïde cubique, et que pour les espèces $8-3$ et $9-3-1$ il n'y a pas de monoïde cubique; on a donc l'identification que voici:

Espèce $6-1$, monoïde cubique, signature 222211,
Espèce $9-6+2$, monoïde cubique, signature 222220,
$\left.\begin{array}{l}\text{Espèce } 8-3\\ \text{Espèce } 9-3-1\end{array}\right\}$, monoïde quartique, signature 222222111000,

et il ne reste qu'à distinguer les deux espèces $8-3$ et $9-3-1$, considérées comme représentées au moyen de cône et monoïde.

Je remarque que le système de cône et monoïde à signature 222222111000 contient 20 constantes. En effet, en prenant $Q=0$ un cône cubique quelconque (9 constantes), on peut prendre à volonté sur ce cône huit droites (8 constantes), et par six de ces droites comme droites doubles et deux de ces droites comme droites simples (20 conditions) faire passer le cône quintique determiné $U=0$; ce cône et le cône cubique $Q=0$ se coupent selon les huit droites (qui comptent pour quatorze droites) et selon une neuvième droite; et par les neuf droites on peut faire passer le cône quartique $P=0$ (5 constantes). Cela donne la monoïde quartique $w=\frac{P}{Q}$, où w contient implicitement comme facteur une constante ; il y a donc en tout $9+8+5+1=23$ constantes. Mais en combinant l'équation de la monoïde avec l'équation $U=0$ du cône quintique, on obtient la monoïde quartique

$$\omega = \frac{P+\alpha P'+\beta P''+\gamma P'''}{Q+\alpha Q'+\beta Q''+\gamma Q'''},$$

et sans perte de généralité on peut disposer des constantes α, β, γ, de manière à satisfaire à trois conditions quelconques ; on doit donc diminuer de 3 le nombre 23, ce qui donne enfin 20 constantes.

La courbe $8-3$ contient 18 constantes, il faut donc chercher quelle est la particularité qui doit avoir lieu pour que le cas, monoïde quartique à signature 222222111000, donne une courbe $8-3$.

J'ai nommé *droites de la monoïde* les droites $P=0$, $Q=0$ qui passent par le sommet ; en supposant qu'il y ait sur la monoïde des droites qui ne passent pas par le sommet, on peut appeler *transversale* une telle droite. Or, pour l'espèce $8-3$, il doit exister sur la monoïde quartique trois transversales qui ne se rencontrent pas ; car alors, en faisant passer par ces transversales un hyperboloïde, cet hyperboloïde et la monoïde se coupent selon les trois transversales et selon la courbe $8-3$ dont il s'agit. Or, en supposant qu'il existe une transversale, le plan passant par le sommet et cette transversale contient trois des droites $P=0$, $Q=0$. En effet, un plan quelconque par le sommet coupe la monoïde selon une courbe quartique avec un point triple au sommet ; pour le plan mené par une transversale, cette courbe quartique devient la transversale et une courbe cubique avec un point triple au sommet ; cette courbe cubique sera évidemment un système de trois droites, à savoir trois des droites $P=0$, $Q=0$. Et réciproquement, si trois quelconques des droites de la monoïde sont situées dans un plan, ce plan coupe la monoïde selon les trois droites et selon une transversale. S'il y a sur la monoïde une seconde transversale, il y aura de même un second système de trois droites dans un plan ; on démontre que si le premier système est composé de trois droites, et le second système de trois *autres* droites, les deux transversales se coupent ; donc, si les deux transversales ne se coupent pas, les deux systèmes auront une droite commune. S'il y a sur la monoïde une troisième transversale, il y a de même un troisième système de trois droites dans un plan ; et si les trois transversales ne se rencontrent pas, il est de plus nécessaire que deux quelconques des trois plans aient en commun une droite de la monoïde ; cela revient à dire qu'il doit y avoir parmi les douze droites $P=0$, $Q=0$ de la monoïde six droites 7, 8, 9, 7′, 8′, 9′ telles que les droites 7, 8′, 9′, les droites 7′, 8, 9′, et les droites 7′, 8′, 9 soient situées chaque système dans un même plan : cela étant, la monoïde aura trois transversales qui ne se rencontrent pas.

Je prends à volonté par un point quelconque de l'espace un tel système de six droites 7, 8, 9, 7′, 8′, 9′ (9 constantes) ; je fais passer par les six droites un cône cubique quelconque $Q=0$ (3 constantes) et aussi un cône quartique quelconque $P=0$ (8 constantes) ; au moyen des deux cônes je forme l'équation $w=\frac{P}{Q}$ de la surface monoïde ; il y a une constante arbitraire contenue implicitement en w : cela donne en tout $9+3+8+1=21$ constantes. Les deux cônes $P=0$, $Q=0$ se coupent selon les six droites 7, 8, 9, 7′, 8′, 9′, et selon six autres droites 1, 2, 3, 4, 5, 6 : il suit de la théorie précédente (mais on peut aussi démontrer analytiquement) qu'il existe un cône quintique $U=0$ qui satisfait aux conditions de passer deux fois par chacune des droites 1, 2, 3, 4, 5, 6 (avoir chacune de ces droites pour une droite double, 18 conditions) et une fois par chacune des droites 7, 8, 9 (3 conditions, en tout $18+3=21$ conditions). Et cela étant, on aura la courbe $8-3$ déterminée au moyen du cône $U=0$ et la surface monoïde $w=\frac{P}{Q}$, à signature 222222111000 (à savoir les droites 1, 2, 3, 4, 5, 6 qui sont par rapport au cône des droites doubles, les droites 7, 8, 9 des droites simples, et les droites 7′, 8′, 9′ des droites qui ne sont pas situées sur le cône). Le nombre des constantes est 21, mais au moyen de la transformation

$$\omega=\frac{P+\alpha P'+\beta P''+\gamma P'''}{Q+\alpha Q'+\beta Q''+\gamma Q'''},$$

on réduit comme auparavant ce nombre à $21-3=18$, ce qui est juste.

J'ajoute les considérations que voici: le cône $U=0$ passe deux fois par chacune des droites 1, 2, 3, 4, 5, 6, une fois par chacune des droites 7, 8, 9. Soit $M=0$ l'équation du système des trois plans qui contiennent les droites 7, 8′, 9′, les droites 7′, 8, 9′, et les droites 7′, 8′, 9 respectivement; le cône $M=0$ contient chacune des droites 7, 8, 9 une fois, et chacune des droites 7′, 8′, 9′ deux fois. Donc le cône $MU=0$ contient chacune des droites 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 7′, 8′, 9′ deux fois; ces douze droites sont les droites d'intersection des cônes $P=0$, $Q=0$, et ainsi nous avons identiquement $MU=AP^2+BPQ+CQ^2$, A, B, C étant des fonctions homogènes de (x, y, z) des ordres 0, 1, 2 respectivement. Cela étant, les équations

$$w=\frac{P}{Q},\quad MU=AP^2+BPQ+CQ^2=0$$

donnent

$$Aw^2+Bw+C=0,$$

équation de la surface quadrique sur laquelle est située la courbe $8-3$.

Je passe à la théorie analytique. Soit, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\xi &= \quad\ \ b\,y+c\,z, & X &= \quad\ \ \beta\,y+\gamma\,z, & \Theta &= \lambda x+\mu y+\nu z,\\
\eta &= a'x \quad\ \ +c'z, & Y &= \alpha'x \quad\ \ +\gamma' z,\\
\zeta &= a''x+b''y\quad\ \ , & Z &= \alpha''x+\beta''y.
\end{aligned}$$

Je prends pour équations des droites 7, 8, 9, 7′, 8′, 9′:

$$(y=0,\quad z=0),\quad (z=0,\quad x=0),\quad (x=0,\quad y=0),$$

$$(x=0,\quad \xi=0),\quad (y=0,\quad \eta=0),\quad (z=0,\quad \zeta=0),$$

et je forme les équations les plus générales pour le cône cubique et le cône quartique qui passent par ces droites; ces équations seront

$$Q = yz\xi\delta + zx\eta\delta' + xy\zeta\delta'' + xyz\Theta = 0,$$
$$-P = yz\xi X + zx\eta Y + xy\zeta Z + xyz\Theta = 0.$$

On a de là la surface monoïde $w = \frac{P}{Q}$. En écrivant dans cette équation $x = 0$, on obtient $w = -\frac{X}{\delta}$; et de même, pour $y = 0$, on obtient $w = -\frac{X}{\delta'}$, et pour $z = 0$ on obtient $w = -\frac{Z}{\delta''}$, c'est-à-dire qu'il y a sur la monoïde les trois transversales

$$(x = 0,\ X + \delta W = 0),\quad (y = 0,\ Y + \delta' W = 0),\quad (z = 0,\ Z + \delta'' W = 0),$$

ou, comme on peut écrire ces équations,

$$\begin{array}{ll}(x = 0, & \beta\, y + \gamma\, z + \delta\ w = 0),\\ (y = 0, & \alpha' x \qquad + \gamma' z + \delta' w = 0),\\ (z = 0, & \alpha'' x + \beta'' y + \qquad + \delta'' w = 0).\end{array}$$

On trouve sans peine l'équation de la surface quadrique qui passe par les transversales; en écrivant, pour abréger,

$A = \delta\delta'\delta''$,

$B = (\delta'\alpha'' + \delta''\alpha')\,\delta x + (\delta''\alpha + \delta\alpha'')\,\delta' y + \delta''\,(\delta\alpha' + \delta'\alpha)\,\delta'' z$,

$C = \alpha'\alpha''\delta x^2 + \beta''\beta\delta'\, y^2 + \gamma\gamma'\delta''\, z^2 + (\gamma\beta''\delta' + \gamma'\beta\delta'')\, yz + (\alpha'\gamma\delta'' + \alpha''\gamma'\delta)\, zx + (\beta''\alpha'\delta + \beta\alpha''\delta')\, xy$,

cette équation est

$$Aw^2 + Bw + C = 0,$$

et en éliminant w entre cette équation et l'équation $w = \frac{P}{Q}$, on obtient l'équation

$$AP^2 + BPQ + CQ^2 = 0,$$

laquelle, en vertu de l'identité

$$AP^2 + BPQ + CQ^2 = xyz\,U,$$

se réduit à $U = 0$, équation d'un cône du cinquième ordre, ce qui donne le système $U = 0$, $w = \frac{P}{Q}$ de cône et monoïde à signature 222222111000. Pour démontrer l'identité dont il s'agit, il convient de remarquer qu'en substituant dans l'expression $AP^2 + BPQ + CQ^2$ les valeurs de P et Q, tous les termes contiennent explicitement le facteur xyz hormis les termes que voici:

$$\begin{aligned} &A\ (y^2z^2\xi^2X^2 + z^2x^2\eta^2Y^2 + x^2y^2\zeta^2Z^2\ ),\\ -&B\ (y^2z^2\xi^2X\delta + z^2x^2\eta^2Y\delta' + x^2y^2\zeta^2Z\delta''),\\ +&C\ (y^2z^2\xi^2\ \delta^2 + z^2x^2\eta^2\ \delta'^2 + x^2y^2\zeta^2\ \delta''^2),\end{aligned}$$

et pour démontrer que ces termes exceptés contiennent aussi le facteur xyz, il suffit de faire voir que la fonction $AX^2 - BX\delta + C\delta^2$ contient le facteur x, car alors, par la symétrie, les fonctions $AY^2 - BY\delta' + C\delta'^2$ et $AZ^2 - BZ\delta'' + C\delta''^2$ contiendront respectivement les facteurs y et z, et l'expression entière sera divisible par xyz. Mais en écrivant $x = 0$, on trouve

$$\left.\begin{array}{ll} AX^2 = & \delta\delta'\delta''(\beta y + \gamma z)^2 \\ -BX\delta & -[\delta'\delta''(\beta y + \gamma z) + \delta(\beta''\delta' y + \gamma'\delta'' z)]\,\delta(\beta y + \gamma z) \\ +C\delta^2 & +(\beta y + \gamma z)(\beta''\delta' y + \gamma'\delta'' z)\,\delta^2 \end{array}\right\} = 0,$$

c'est-à-dire $AX^2 - BX\delta + C\delta^2$ contient le facteur x. Donc enfin

$$AP^2 + BPQ + CQ^2$$

contient le facteur xyz, ce qui était le théorème à démontrer.