71.

PREUVE QUE π NE PEUT PAS ÊTRE RACINE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE À COEFFICIENTS ENTIERS*.

[*Comptes Rendus*, CXI. (1890), pp. 866—871.]

LEMME. *Soit*

$$J = \cfrac{\epsilon m}{n + \cfrac{\epsilon' m'}{n' + \cfrac{\epsilon'' m''}{n'' + \ldots}}},$$

où $\epsilon^2 = \epsilon'^2 = \epsilon''^2 = \ldots = 1$; n, n', n'', ... *sont des nombres réels positifs et plus grands que l'unité;* m, m', m'', ..., *des nombres réels ou complexes, et où chaque quotient partiel est assujetti à la condition que* $n-1$ *est plus grand que le module de* m.

Alors je dis que le module de J sera moindre que l'unité.

Supposons que ces conditions soient satisfaites par $\frac{m}{n}$, $\frac{m_,}{n_,}$.

Soit $$m = \alpha + i\beta.$$

Par hypothèse $$n - 1 > \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Servons-nous de $M(x)$ pour signifier le module de x, alors

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{M(m)}{n} < \frac{n-1}{n} < 1,$$

de sorte que, si $\frac{m}{n} = \alpha_, + i\beta_,$, $\alpha_,^2 + \beta_,^2 < 1$ et, à plus forte raison, $\alpha_,^2 < 1$,

$$M\left(\frac{m_,}{n_, + \frac{m}{n}}\right) = \frac{M(m_,)}{M(n_, + \alpha_, + i\beta_,)} = \frac{M(m_,)}{\sqrt{\{(n_, + \alpha_,)^2 + \beta_,^2\}}} < \frac{M(m_,)}{n_, - 1},$$

* Cette Note doit être substituée à la Note de l'auteur qui a été insérée, par suite d'un malentendu, dans les *Comptes rendus* du 24 novembre dernier. La Note précédente, qui ne traitait que le cas le plus restreint du théorème du texte, est affectée d'inexactitudes qui la rendent de nulle valeur.

car $(n_{\prime} + \alpha_{\prime})^2$, quand $\alpha_{\prime}$ est compris entre les limites $1, -1$, est plus grand que $(n_{\prime} - 1)^2$.

Donc, par hypothèse,

$$M\left(\frac{m_{\prime}}{n_{\prime} + \dfrac{m}{n}}\right) < 1,$$

et, évidemment, par le même raisonnement, on trouve successivement

$$M\left(\frac{m}{n}\right), \quad M\left(\frac{m_{\prime}}{n_{\prime} + \dfrac{m}{n}}\right), \quad M\left(\frac{m_{\prime\prime}}{n_{\prime\prime} + \dfrac{m_{\prime}}{n_{\prime} + \dfrac{m}{n}}}\right), \quad \ldots$$

ou, ce qui revient à la même chose, toutes les quantités

$$M\left(\frac{\epsilon m}{n}\right), \quad M\left(\frac{\epsilon_{\prime} m_{\prime}}{n_{\prime} + \dfrac{\epsilon m}{n}}\right), \quad M\left(\frac{\epsilon_{\prime\prime} m_{\prime\prime}}{n_{\prime\prime} + \dfrac{\epsilon_{\prime} m_{\prime}}{n_{\prime} + \dfrac{\epsilon m}{n}}}\right), \quad \ldots$$

seront moindres que l'unité*.

Nous allons démontrer, à l'aide de ce lemme, que, si θ est une racine d'une équation *irréductible* à coefficients entiers, tang θ ne peut pas être rationnel ou même une fonction rationnelle à coefficients rationnels de θ.

Supposons que $A\theta^n + B\theta^{n-1} + \ldots + L = 0$ et que tang θ soit une fonction rationnelle de θ. On peut supposer que $A = 1$, car, si nous écrivons $\theta' = A\theta$†, alors l'équation pour θ' peut s'exprimer semblablement à celle pour θ, mais avec le premier coefficient égal à l'unité. De plus, si l'on peut démontrer que tang θ' ne peut pas être une fonction rationnelle de θ', alors, puisque $\theta' = A\theta$, et conséquemment tang θ', est une fonction rationnelle de tang θ, il s'ensuivra que, si tang θ est une fonction rationnelle de θ, tang θ' sera une fonction rationnelle de θ', ce qui est contraire à la supposition faite‡.

* Ce lemme peut être envisagé comme une application de la proposition 8, III d'Euclide. En prenant O le centre d'un cercle à rayon unité et N un point extérieur à ce cercle, Euclide y enseigne que le segment de ON, compris entre N et le contour convexe, sera moindre que toute autre ligne droite menée de N au cercle: à plus forte raison il sera moindre que la distance de N à un point quelconque d'un cercle intérieur au premier. Voir la Note au bas de la page [685, below] pour une addition qu'on doit faire à ce lemme.

† Voir le scolie pour le cas plus général où les coefficients de l'équation en θ sont des nombres complexes [p. 686, below].

‡ L'illustre Legendre aurait, il me semble, dû faire une transformation analogue dans sa présentation célèbre de la preuve de Lambert de son théorème (Note IV, *Éléments de Géométrie*). Pour avoir négligé cette précaution, la succession infinie de quantités toujours décroissantes qu'il trouve par le moyen du lemme de Lambert ne forme pas nécessairement une succession de nombres entiers, mais de tels nombres divisés par des puissances toujours croissantes de A, le dénominateur de θ, supposé rationnel, exprimé comme fraction vulgaire réduite, ce qui n'est nullement impossible.

Donc, nous pouvons supposer que l'équation en θ soit de la forme

$$\theta^n + B\theta^{n-1} + \ldots + L = 0.$$

Évidemment on peut aussi supposer que l'équation en θ soit irréductible.

Écrivons $\theta \operatorname{tang} \theta = \tau(\theta)$, de sorte que

$$\tau(\theta) = \cfrac{\theta^2}{1 - \cfrac{\theta^2}{3 - \cfrac{\theta^2}{5 - \ddots}}}$$

on trouvera

$$\cfrac{\theta^2}{3 - \cfrac{\theta^2}{5 - \ddots}} = \frac{\tau(\theta) - \theta^2}{\tau(\theta)},$$

$$\cfrac{\theta^2}{5 - \cfrac{\theta^2}{7 - \ddots}} = \frac{\tau(\theta)(3 - \theta^2) - 3\theta^2}{\tau(\theta) - \theta^2},$$

$$\cfrac{\theta^2}{7 - \cfrac{\theta^2}{9 - \ddots}} = \frac{\tau(\theta)(15 - 6\theta^2) - 15\theta^2 + \theta^4}{\tau(\theta)(3 - \theta^2) - 3\theta^2},$$

et, en nommant

$$\cfrac{\theta^2}{2r + 1 - \cfrac{\theta^2}{2r + 3 - \ddots}} = \Theta_r(\theta),$$

$$\Theta_r(\theta) = \frac{A_{r+1}(\theta)\,\tau(\theta) - B_{r+1}(\theta)}{A_r(\theta)\,\tau(\theta) - B_r(\theta)},$$

$$\Theta_{r+1}(\theta) = \frac{A_{r+2}(\theta)\,\tau(\theta) - B_{r+2}(\theta)}{A_{r+1}(\theta)\,\tau(\theta) - B_{r+1}(\theta)}.$$

....

....

Soit $\Theta_{r,i}(\theta)$ ce que devient $\Theta_r(\theta)$ quand on substitue θ_i pour θ dans la valeur de $\tau(\theta)$. Si, pour une certaine racine θ_i de l'équation supposée en θ, $\tau_{r,i}(\theta) = \tau_r(\theta_i)$, alors $\tau_{r,i}(\theta)$ en vertu du lemme aura un module moindre que l'unité ; sinon, ce module deviendra éventuellement et restera, pour une certaine valeur r, et pour toute valeur supérieure, au-dessous d'une certaine limite, parce que dans ce cas $\Theta_{r,i}(\theta)$ différera et continuera à différer par une quantité aussi petite qu'on veut de $\frac{A_{r+1}(\theta_i)}{A_r(\theta_i)}$ (dont le module a une limite supérieure dépendant de la grandeur de θ_i) quand r est pris suffisamment grand. Cela sera développé au long dans une Communication ultérieure.

Supposons que N soit le plus grand des modules carrés des n racines,

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ les n racines de l'équation proposée en θ. Prenons $2r > N$; alors, en vertu du lemme* et à cause du principe énoncé plus haut, on aura éventuellement (en prenant $2r - N$ suffisamment grand) le produit des modules de $\Theta_r(\theta_1), \Theta_r(\theta_2), \ldots, \Theta_r(\theta_n)$ moindre que l'unité pour une certaine valeur de r et toute valeur de r supérieure à celle-ci.

Or, remarquons que, à cause de la valeur l'*unité* du coefficient de θ^n dans l'équation en θ, tous les $A(\theta)$ et les $B(\theta)$ seront des fonctions linéaires et *entières* de $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$, car si $\mu > n-1$, θ^μ devient une fonction linéaire et entière de $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$.

Ainsi, en supposant que k soit un nombre tel qui rende $k\tau(\theta)$ une fonction linéaire entière de $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$, pour toute valeur de r,

$$k[A_r(\theta)\tau(\theta) - B_r(\theta)]$$

sera une fonction rationnelle et entière de θ; or, en vertu de ce qui a été dit, le produit des modules de

$$\Theta_\mu(\theta_1), \quad \Theta_\mu(\theta_2), \quad \ldots, \quad \Theta_\mu(\theta_n)$$

sera moindre que l'unité quand μ est plus grand que le nombre que nous avons nommé r. Mais le produit des modules de n quantités est le module de leur produit; donc

$$\begin{aligned}
&k^n \Pi [A_r(\theta)\tau(\theta) - B_r(\theta)],\\
&k^n \Pi [A_{r+1}(\theta)\tau(\theta) - B_{r+1}(\theta)],\\
&k^n \Pi [A_{r+2}(\theta)\tau(\theta) - B_{r+2}(\theta)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

formeront une succession infinie de nombres entiers décroissants, ce qui est impossible†.

Ainsi $\tau(\theta)$ et conséquemment tang θ ne peut pas être une fonction rationnelle de θ quand θ est racine d'une équation à coefficients entiers.

Si nous supposons que tang θ soit une quantité rationnelle pure et simple, cela ne fait nul changement dans notre raisonnement; ainsi, puisque tang π $\left(\text{ou bien si l'on veut tang}\,\frac{\pi}{4}\right)$ est rationnel, π ne peut pas être la racine d'une équation algébrique à coefficients entiers.

Je démontre par un procédé à peu près pareil à ce qui précède, la proposition inverse, c'est-à-dire que, si tang θ est racine d'une équation algébrique, alors θ ne peut pas être une fonction rationnelle à coefficients rationnels de tang θ. Or, dans cette théorie, il n'y a nulle distinction entre les quantités réelles et complexes, de sorte que $\sqrt{(-1)}$ compte comme quantité entière. Donc tang $\sqrt{(-1)}$, et conséquemment e, base des logarithmes népériens (qui

* On doit sous-entendre par le *lemme* la proposition ainsi nommée au commencement de cette Note, mais avec l'addition essentielle, facilement prouvée, que quand les n croissent continuellement et les m restent constants, alors, en commençant avec un r suffisamment grand, le module de J deviendra une quantité aussi petite que l'on veut.

† Voir le scolie [p. 686, below] pour le cas plus général où l'équation en θ a des coefficients complexes.

en est une fonction algébrique) ne peut pas être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. En réunissant les deux procédés applicables à ces deux cas, on parvient à démontrer un théorème plus général, à savoir :

Si une fonction trigonométrique quelconque et son amplitude sont liées ensemble par une équation algébrique à coefficients entiers, ni l'une ni l'autre ne peut satisfaire à une équation algébrique à coefficients entiers, et comme cas particulier compris dans ce théorème, une fonction trigonométrique et son amplitude ne peuvent pas être l'une une racine d'une équation algébrique à coefficients entiers et l'autre aussi une racine d'une telle équation.*

Il y a un théorème un peu plus général, au moins en apparence, qu'on peut démontrer par un raisonnement tout à fait semblable.

Nommons une quantité qui est racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers, simples ou complexes, *quantité équationnelle*, et les racines de la même équation algébrique irréductible à coefficients entiers, *quantités équationnelles associées*; de plus, nommons une quantité qui est racine d'une équation dont les coefficients sont fonctions rationnelles d'un nombre quelconque d'autres quantités données *fonction équationnelle* de ces quantités ; alors on peut affirmer qu'une fonction trigonométrique et son amplitude ne peuvent pas être, toutes les deux, fonctions équationnelles d'un même système de quantités équationnelles associées. Cette proposition donne lieu de soupçonner qu'au moyen de formules propres aux fonctions elliptiques on pourrait démontrer qu'une fonction elliptique, son amplitude et son paramètre ne peuvent pas être, tous les trois, fonctions équationnelles d'un même système de quantités équationnelles associées.

Scolie. On ne doit nullement exclure le cas où θ serait proposé comme racine d'une équation à coefficients entiers, mais complexes.

Dans ce cas, si le coefficient du premier terme en cette équation est $\alpha + i\beta$, alors afin de pouvoir réduire l'équation à sa forme canonique où ce coefficient est l'unité, sans que le tangent du nouveau θ cesse d'être fonction rationnelle de tang θ, il faut écrire $\theta' = (\alpha^2 + \beta^2)\,\theta$.

On remarquera aussi que les produits [p. 685, above]

$$k^n \Pi [A_r(\theta)\,\tau(\theta) - B_r(\theta)], \qquad k^n \Pi [A_{r+1}(\theta)\,\tau(\theta) - B_{r+1}(\theta)], \qquad \ldots,$$

au lieu d'être entiers et réels, deviendront quantités complexes, mais entières, dont les *modules* vont à l'infini en décroissant; de sorte que la démonstration donnée, pour le cas où les coefficients de l'équation en θ sont des nombres ordinaires, reste bonne pour le cas général.

* Ainsi on peut affirmer qu'une fonction trigonométrique et son amplitude, ou bien un nombre et son logarithme, ne peuvent pas être tous les deux racines de deux équations algébriques quelconques à coefficients entiers. Par exemple, $\cos(\cos\lambda\pi)$ ne peut pas être un nombre algébrique de Kronecker, quand λ est rationnel, car son amplitude $\cos\lambda\pi$ est un tel nombre. De même $e^{\sqrt[i]{\lambda} + \sqrt[j]{\mu} + \sqrt[k]{\nu} + \ldots}$ ne peut pas être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers.