64.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FRACTIONS CONTINUES QUI EXPRIMENT LES DEUX RACINES D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE.

[*Comptes Rendus*, CVIII. (1889), pp. 1084—1086.]

NOUS avons donné dans une Note précédente [p. 644, above], pour les deux racines x et x' d'une équation quadratique à coefficients entiers, les formules jumelles

$$x = (t\,(\tau 0)^{\infty}), \quad -x' = (\bar{t}\,(\underline{\tau}0)^{\infty}).$$

Mais ces formules admettent encore une simplification importante au moyen des considérations suivantes.

Un type peut être nommé *omni-positif* ou *omni-négatif* quand tous ses éléments sont positifs pour un des cas et tous négatifs pour l'autre : il sera nommé *homonyme* quand il est *ou* omni-positif *ou* omni-négatif sans spécifier lequel des deux il est.

Le zéro sera regardé comme un *nombre* (non pas neutre, mais) *amphibolique*, c'est-à-dire qui est en même temps positif et négatif, de sorte qu'un type omni-positif ou omni-négatif ne cesse pas d'être homonyme en y ajoutant ou y entremêlant un ou plusieurs zéros.

De plus, on remarquera que $(\bar{T}) = -(T)$.

Alors la théorie, atteignant son dernier terme de simplicité et de généralité, donne lieu à l'énoncé suivant :

En supposant que t est un type homonyme quelconque et τ un autre, et que x, x' sont les deux racines d'une équation quadratique à coefficients entiers, on aura toujours

$$x = (t\tau^{\infty}), \quad x' = (t0\,(\bar{\tau})^{\infty})$$

avec la faculté à t de disparaître.

Ainsi, par exemple, en supposant que t disparaisse et que τ devienne monomial et égal à a, si

$$x = (a, a, a, \ldots, \textit{ad infinitum}),$$

on aura $$x' = (0, -a, -a, \ldots, \textit{ad infinitum}),$$

c'est-à-dire $\qquad x' = -(0, a, a, a, \ldots, \textit{ad infinitum});$

de sorte que $\qquad x' = -\dfrac{1}{x}$ *.

On remarquera que les types $t\tau^{\infty}$, $t0\underline{\bar{\tau}}^{\infty}$ sont mutuellement inverses l'un de l'autre, car $(t00\underline{\underline{\bar{\bar{\tau}}}}^{\infty}) = (t\tau^{\infty})$.

Nous nous sommes déjà servi† dans nos conférences, tenues à King's College London en 1859, sur la détermination du nombre de solutions en nombres entiers d'un système d'équations numériques‡, avec grand avantage de cette idée d'une série de quantités omni-positive, omni-négative ou homonyme et de la conception du caractère du zéro comme appartenant aux deux catégories des quantités positives et négatives à la fois.

Dans une Note à suivre, nous nous proposons de faire connaître la connexion§ remarquable qui subsiste entre les racines de l'équation

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

et les développements en fractions continues des fractions ordinaires $\dfrac{p \pm bq}{aq}$, où p, q sont les nombres de Pell qui appartiennent au déterminant $b^2 - ac$, et, si nous ne nous sommes pas trompé, nous espérons fonder là-dessus une règle pour l'extraction simultanée des deux racines de l'équation au moyen de ces deux développements.

* Et, en général, quand $x = -\dfrac{1}{x'}$, on aura

$$x = ((\theta)^{\infty}),$$

où θ est un type symétrique, ce qui est le théorème de Gallois (*Journal de Liouville*, t. II. p. 385).

De même, si $x = ((\theta 0)^{\infty})$ (θ étant symétrique) et ainsi $\underline{\theta} = \theta$, on aura

$$-x' = ((00\theta 0)^{\infty}) = ((\theta 0)^{\infty}) = x,$$

de sorte que $((\theta 0)^{\infty})$ est la forme générale de la fraction continue qui exprime la racine carrée d'une quantité rationnelle quelconque.

[† See Vol. II. of this Reprint, p. 122.]

‡ Inédites jusqu'à ce jour, mais qui doivent paraître prochainement dans l'*American Journal of Mathematics*. C'est dans nos recherches sur ce sujet que nous avons rencontré et discuté la théorie géométrique de dispositions de points dans un plan et dans l'espace que notre éminent Confrère M. Halphen a retrouvée indépendamment depuis et à laquelle il a donné le nom de *théorie d'aspects*. C'est en réduisant la détermination du nombre de solutions en nombres entiers d'un système de 3 équations à dépendre d'un agrégat de pareilles déterminations pour des systèmes de 2 équations que cette théorie s'est forcément mise en évidence pour les points dans un plan. De même, en faisant dépendre le problème pour un système de 4 de celui de systèmes de 3 équations, on est amené à une théorie semblable pour l'espace ; bien entendu, l'œil regardé comme un seul point dans la théorie pour le plan devient linéaire, ou, ce qui revient à la même chose, un système de deux points, pour l'espace.

§ Pour l'établir, nous nous servons encore de notre théorème de l'immutabilité des rapports de $[`T'] : [T'] - [`T] : [T]$ quand $T = t\tau\ (0\tau)^i\, \underline{\bar{t}}$ pour toute valeur positive et entière de i.