62.

SUR LA RÉDUCTION BIORTHOGONALE D'UNE FORME LINÉO-LINÉAIRE À SA FORME CANONIQUE.

[*Comptes Rendus*, CVIII. (1889), pp. 651—653.]

SOIT F une fonction linéo-linéaire des deux séries de lettres

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;$$

alors F contiendra n^2 termes. En assujettissant les x et les ξ respectivement à deux substitutions orthogonales indépendantes, on introduit dans la transformée $n^2 - n$ quantités arbitraires, de sorte que, en leur donnant des valeurs convenables, on doit pouvoir faire disparaître ce nombre de termes en ne conservant que les n paires dont les arguments seront (par exemple)

$$x_1\xi_1, x_2\xi_2, \ldots, x_n\xi_n.$$

On peut nommer les multiples de ces arguments les *multiplicateurs canoniques*; je vais donner la règle pour les déterminer, et en même temps pour trouver les deux substitutions orthogonales simultanées qui amènent la forme canonique. La marche à suivre sera parfaitement analogue à celle qui s'applique à la réduction d'une forme quadrique à n lettres à sa forme canonique au moyen d'une seule substitution orthogonale ; mais on remarquera, *a priori*, une distinction essentielle entre les deux questions. Pour le cas d'une seule quadrique, les multiplicateurs canoniques sont absolument déterminés; mais, pour le cas actuel, il est évident que chacun de ces multiplicateurs peut changer son signe, de sorte que ce sont les carrés de ces multiplicateurs qui doivent se présenter dans le résultat.

Il sera utile de rappeler quelques faits élémentaires sur les matrices. Le carré d'une matrice est la matrice qui se produit par la multiplication des lignes par les colonnes; il sera une matrice non symétrique dont les *racines latentes* seront les carrés des racines latentes d'une matrice donnée. Au contraire, le produit d'une matrice par son transverse donnera (selon l'ordre de la multiplication) lieu à deux matrices symétriques qu'on obtient par la multiplication des lignes par des lignes ou bien par celle des colonnes par les colonnes; ces matrices seront distinctes, mais posséderont les mêmes racines latentes, c'est-à-dire en affectant tous les termes dans la diagonale de symétrie de l'un ou de l'autre avec la même addition, soit $-\lambda$, le déterminant d'une matrice ainsi affectée sera le même pour l'un comme pour l'autre*.

En différentiant F par rapport aux x et aux ξ, on obtient deux matrices, dont l'une sera la transverse de l'autre, que je nommerai les matrices déterminatives. Avec l'aide de ces matrices on obtient une solution complète du problème voulu.

(1) Pour déterminer les multiplicateurs canoniques:

Je dis que les racines latentes de leur produit seront les carrés des multiplicateurs canoniques.

Il peut arriver qu'un de ces multiplicateurs soit zéro; alors le dernier terme de l'équation aux racines latentes, qui n'est autre chose que le carré du déterminant d'une matrice déterminative, s'évanouit; et l'on voit que le cas de la disparition d'un des n termes dans la réduite canonique est indiqué par l'évanouissement du déterminant de la matrice déterminative.

(2) Pour trouver les deux substitutions orthogonales canoniques:

Prenons une des deux matrices symétriques affectées de $-\lambda$ dans chaque terme de sa diagonale; en supprimant une quelconque de ses lignes, les n premiers mineurs de la matrice diminuée qui restent divisés chacun par la racine carrée de la somme de leurs carrés (fonctions de λ), en donnant à λ successivement les valeurs des n racines latentes, fourniront les n^2 termes d'une des substitutions orthogonales, et de même on obtient l'autre substitution orthogonale en agissant semblablement *pas à pas* sur l'autre matrice affectée: ainsi le problème de la réduction voulue est complètement résolu.

Prenons, par exemple,

$$F = 8x\xi - x\eta - 4y\xi + 7y\eta.$$

* Toutes ces racines latentes seront non seulement réelles (comme elles doivent l'être à cause de la forme symétrique de la matrice), mais aussi positives; car, en substituant λ à $-\lambda$, les coefficients de l'équation latente (en commençant avec le dernier) sont, respectivement, le carré du déterminant complet, la somme des carrés des premiers mineurs, des seconds mineurs, etc., de la matrice déterminative (le premier coefficient étant l'unité et le second la somme des carrés des coefficients de la forme bilinéaire). Chacune de ces sommes sera un invariant biorthogonal, et le déterminant de la matrice déterminative lui-même sera un invariant gauche de la forme bilinéaire.

Ajoutons que les deux matrices qui sont les carrés cauchiens de cette matrice, envisagées comme discriminants, fourniront deux quadriques (dont chacune contiendra un seul des deux systèmes donnés de lettres) qui seront des covariants orthogonaux simultanés de la fonction bilinéaire donnée.

(1) Pour trouver les multiplicateurs canoniques:

On prend la matrice déterminative dans ses deux formes

$$\begin{matrix} 8; & -1 \\ -4; & 7 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} 8; & -4 \\ -1; & 7 \end{matrix},$$

dont les produits affectés seront

$$\begin{matrix} 65-\lambda; & -39 \\ -39\ ; & 65-\lambda \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} 80-\lambda; & -36 \\ -36\ ; & 50-\lambda \end{matrix}.$$

Ainsi, en se servant de l'un ou de l'autre, on obtient

$$\lambda^2 - 130\lambda + 2704 = 0,$$

dont les racines sont 26 et 104, de sorte que $\sqrt{26}$ et $2\sqrt{26}$ seront les multiplicateurs canoniques.

(2) Pour trouver les substitutions, on assigne ses deux valeurs à

$$39 : 65 - \lambda, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 39 : 39 \text{ et } 39 : -39$$

et à

$$36 : 80 - \lambda, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 36 : 54 \text{ et } 36 : -24.$$

Ainsi l'on aura, pour les deux matrices de substitution,

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}}; & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}; & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}, \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \frac{2}{\sqrt{13}}; & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}}; & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{matrix},$$

et, en effet, on vérifie facilement que

$$\sqrt{26}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2\xi}{\sqrt{13}}+\frac{3\eta}{\sqrt{13}}\right)+2\sqrt{26}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{3\xi}{\sqrt{13}}+\frac{2\eta}{\sqrt{13}}\right)$$
$$= 8x\xi - x\eta - 4y\xi + 7y\eta.$$

Si l'on donne les deux matrices symétriques ayant les mêmes racines latentes qui doivent représenter respectivement les deux produits *cauchiens* d'une matrice de l'ordre n par elle-même, on verra facilement que le problème de trouver cette dernière matrice a été virtuellement résolu plus haut, et que, comme le problème de trouver la véritable racine carrée d'une seule matrice générale donnée, il admet 2^n solutions.