58.

SUR LES NOMBRES PARFAITS.

[*Comptes Rendus,* CVI. (1888), pp. 641, 642; *Mathesis,* VIII. (1888), pp. 57—61.]

DANS la démonstration de l'impossibilité qu'un nombre à 3 éléments soit un nombre parfait, qui a paru dans les *Comptes rendus* du 6 février dernier, il y a une petite omission que M. Mansion a eu la bonté de me signaler. Il est dit [p. 606, above], que les nombres $\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}$, $\frac{5^{2j+1}+1}{5+1}$, $\frac{5+1}{2}$ sont premiers entre eux.

Cela n'est pas vrai si $2j+1$ contient 3, mais, dans ce cas-là, $5^{2j+1}+1$ contiendra 5^3+1 qui contient 7 : conséquemment, on aura les quatre éléments 3, 5, 7, 11. Donc la démonstration reste bonne.

M. Sylvester vient de publier [p. 604, above], dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (séance du 6 février 1888, t. CVI. pp. 403—405), une importante contribution à l'étude des nombres parfaits, à l'occasion de remarques de notre collaborateur M. Servais (*Mathesis*, t. VII. pp. 228—230).

Nous sommes heureux de reproduire ici les considérations développées par l'illustre géomètre anglais, comme complément des articles publiés à ce sujet dans *Mathesis* (t. VI. pp. 100—101, 145—148, 178, 248—250, et t. VII. pp. 228—230, 245—246).

La notation $c \equiv i \equiv 1$ (mod 4) est équivalente à la notation plus explicite:

$$c = i + \mathfrak{M}\,4 = 1 + \mathfrak{M}\,4$$

et se prononce : *c est congru à i et à* 1, *suivant le module* 4.

Nous ajoutons quelques notes à l'article un peu bref de M. Sylvester pour en faciliter l'intelligence*. P. MANSION.

Existe-t-il des nombres parfaits impairs ? C'est une question qui reste indécise.

* Dans les nos. des *C. R.* du 13 et du 20 février, M. Sylvester a publié de nouvelles recherches sur les nombres parfaits dont nous ne pouvons, faute d'espace, que signaler plus bas, les conclusions en note. Il s'est aussi occupé des nombres parfaits dans les nos. de *Nature*, du 15 et du 22 décembre 1887, et dans l'*Educational Times* du 1er mars 1888.

Dans un article intéressant de M. Servais, paru dans le journal *Mathesis*, en octobre 1887, on trouve cette proposition qu'*un nombre parfait impair* (*s'il y en a*) *qui ne contient que trois facteurs premiers distincts est nécessairement divisible par* 3 *et* 5. Je vais démontrer ici qu'un tel nombre n'existe pas, au moyen d'un genre de raisonnement qui m'a fourni aussi une démonstration de ce théorème qu'*il n'existe pas de nombre parfait impair qui contienne moins de six facteurs premiers distincts.*

On voit facilement que la somme de la série géométrique

$$1 + c + c^2 + \ldots + c^i$$

où c est impair, sera elle-même paire quand i est impair; de plus, quand i est pair, cette somme sera toujours impaire, mais impairement paire seulement dans le cas où $c \equiv i \equiv 1$ (mod 4).

Donc, si un nombre parfait impair est de la forme $p^i q^j r^k \ldots$ ($p, q, r, \ldots$ étant des nombres premiers distincts), tous les indices $i, j, k, \ldots$ doivent être pairs à l'exception d'un seul, soit i, lequel, de même que sa base p, sera congru à 1 par rapport au module 4; car on doit avoir

$$\int p^i \int q^j \int r^k \ldots = 2p^i q^j r^k \ldots,$$

$\int x^i$ représentant $1 + x + \ldots + x^i$, c'est-à-dire $\dfrac{x^{i+1} - 1}{x - 1}$.

Ainsi, on voit qu'un nombre parfait impair (si un tel nombre existe) sera de la forme $M^2 (4q + 1)^{4k+1}$, $4q + 1$ étant un nombre premier qui ne divise pas M*.

Comme corollaire, on peut déduire qu'aucun nombre parfait impair ne peut être divisible par 105. En effet, soit un tel nombre $3^{2i} 5^{2j} 7^{2k} \ldots$; on aura

$$\frac{\int 3^{2i} \int 5^{2j} \int 7^{2k}}{3^{2i} 5^{2j} 7^{2k}} \gtreqless \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}\right);$$

c'est-à-dire $\gtreqless \dfrac{2 \,.\, 13 \,.\, 19}{5 \,.\, 49}$; c'est-à-dire $\dfrac{494}{245}$, qui est plus grand que 2.

Remarquons qu'en général, si $p^i q^j r^k \ldots$ est un nombre parfait, il faut que

$$\frac{p^{i+1}}{p^i (p-1)} \frac{q^{j+1}}{q^j (q-1)} \ldots \text{ c'est-à-dire } \frac{p}{p-1} \frac{q}{q-1} \frac{r}{r-1} \ldots$$

soit plus grand que 2†.

* Théorème démontré aussi, en 1886, par M. Stern, dans *Mathesis*, t. VI. pp. 248—250, mais que l'on trouve également au no. 109, du chapitre III, de l'opuscule d'Euler: *Tractatus de numerorum doctrina*, publié dans les *Commentationes arithmeticae collectae* (voir t. II. pp. 514—515).

Il en résulte que, si 3, 7, ou 11, etc. entrent comme facteur dans un nombre parfait impair, ils y entrent avec un exposant pair, car ils sont de la forme $(4p + 3)$.

† Voir, par exemple, l'article de M. Servais, p. 230. D'après la définition des nombres parfaits, on a

$$\frac{\int p^i \,.\, \int q^j \,.\, \int r^k}{p^i q^j r^k} = 2,$$

Ainsi, à moins que le plus petit des éléments $p, q, r \ldots$ ne soit pas plus grand que 3, on doit avoir

$$\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\ldots > 2;$$

mais en ne dépassant pas 19, ce produit est moindre que 1,94963. Conséquemment le nombre des éléments, dans ce cas, doit être 7 au moins. Puisque

$$1{,}95 \times \left(1 + \frac{1}{40}\right) < 2,$$

on voit immédiatement que, si un nombre parfait à 7 éléments parmi lesquels 3 ne figure pas, existe, le septième élément ne pourrait pas dépasser 37*.

Passons au cas de 3 éléments 3, q, r d'un nombre parfait impair. Puisque

$$\frac{3}{2}\frac{7}{6}\frac{11}{10} = \frac{231}{120} < 2,$$

on voit que $3^i \cdot 7^j \cdot 11^k$, et à plus forte raison $3^i p^j q^k$, où p, q sont des nombres quelconques autres que 3 ou 5, ne peut être un nombre parfait.

Supposons donc que 3, 5, q sont les éléments d'un nombre parfait; puisque

$$\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{17}{16} = \frac{255}{128} < 2,$$

on voit que q ne peut être ni 17, ni un nombre quelconque plus grand que 17. Donc $q = 11$ ou $q = 13$; car nous avons vu que 3, 5, 7 ne peuvent jamais se trouver réunis comme éléments d'un nombre parfait quelconque.

(1) Soient 3, 5, 13 les éléments. L'indice de 13 ne peut pas être impair, car alors le nombre

$$\int 13^{2i+1} = \frac{13^{2i+2} - 1}{13 - 1}$$

---

ou encore
$$\frac{p^{i+1}-1}{p^i(p-1)} \cdot \frac{q^{j+1}-1}{q^j(q-1)} \cdot \frac{r^{k+1}-1}{r^k(r-1)} = 2.$$
On déduit aisément de là (1) que $(q^{j+1}-1)(r^{k+1}-1)$ doit être divisible par p. (2) En supprimant (-1) dans les numérateurs,

$$\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{r}{r-1} > 2.$$

* Dans les *C. R.* du 13 février, M. Sylvester a prouvé qu'il ne peut y avoir de nombre parfait premier avec 3, ayant même 7 ou 8 éléments. Il se sert pour arriver à ce résultat de propriétés (déduites du théorème de Fermat) des expressions $\theta^n - 1$, $[(\theta^n - 1) : (\theta - 1)]$; il nomme ces expressions *fermatien* de base θ et d'*indice* n, et *fermatien réduit* en l'honneur du grand géomètre de Toulouse. Il rappelle, à ce propos, les mots adressés à celui-ce par Pascal : "Au plus grand homme de l'Europe," mots gravés sur le buste de Fermat au musée de Toulouse. La citation exacte de Pascal est : "Quoique vous soyez celui *de toute l'Europe* que je tiens pour *le plus grand géomètre*, etc." (Lettre du 10 août 1660).

contiendrait le facteur 7, et 7 devrait être un des éléments*. Il s'ensuit que $(3^{2i+1}-1)(13^{2j+1}-1)$ devrait contenir 5; mais, par rapport au module 5, une puissance impaire quelconque de 3 ou 13 est congrue à 3 ou à 2. Donc la combinaison 3, 5, 13 est inadmissible.

(2) Soient 3, 5, 11† les éléments. L'indice de 5 doit être de la forme $4j+1$; mais, si $j>0$,

$$\int 5^{4j+1} = \frac{5^{4j+2}-1}{5-1}$$

contiendra les trois nombres impairs premiers entre eux‡

$$\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}, \quad \frac{5^{2j+1}+1}{5+1}, \quad \frac{5+1}{2}$$

[pourvu que $2j+1$ ne soit pas divisible par 3; dans ce cas, $5^{2j+1}+1$ contiendrait $5^3+1=18.7$, de sorte que 7 serait un élément].

Conséquemment, il y aura au moins trois autres éléments en plus de 5, ce qui est inadmissible; donc le nombre sera de la forme $3^{2i}.5.11^{2k}$.

Donc $(1+5)(11^{2k+1}-1)$ doit contenir 9, ce qui est impossible; car $11^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3$.

Ainsi, on voit qu'un nombre parfait impair avec 3 éléments seulement ne peut exister§.

Quant aux nombres parfaits pairs, Euclide a démontré que $2^n \int 2^n$, c'est-à-dire $2^n(2^{n+1}-1)$ est un nombre parfait pourvu que $2^{n+1}-1$ soit un nombre premier. Mais on doit à Euler la seule preuve|| que je connaisse de la proposition réciproque qu'*il n'existe pas de nombres pairs parfaits autres que ceux d'Euclide.*

Note. On peut encore établir le (2) comme il suit. Le nombre $\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}$ introduit dans le premier membre de l'égalité hypothétique

$$\frac{3^{2i+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{4j+2}-1}{5-1} \cdot \frac{11^{2k+1}-1}{11-1} = 2.3^{2i}.5^{4j+1}.11^{2k}$$

* $13^{2i+2}-1$ est divisible par $13^2-1=168=7\times 24$.

† 3 et 11 ont des exposants pairs (voir la première note, p. [616]).

‡ Les nombres $5^{2j+1}-1$, $5^{2j+1}+1$ n'ont d'autre diviseur commun que leur différence 2; ensuite on a

$$5^{2j+1} = \mathfrak{M}\,3+2,$$

donc $5^{2j+1}-1$ et $\frac{1}{4}(5^{2j+1}-1)$ ne sont pas divisibles par $\frac{5+1}{2}=3$. Mais $\frac{5^{2j+1}+1}{5+1}$ n'est pas toujours premier avec 3; en effet, $5^{2j+1}+1$ est un multiple de 9 plus 6, 0 ou 3 suivant que $2j+1$ est de la forme $3p+1$, $3p$, ou $3p+2$. Les lignes entre crochets manquent dans les *C. R.*; elles nous ont été obligeamment communiquées par l'auteur, pour compléter la démonstration, dans le cas où 5^{2j+1} est divisible par 9. (Voir aussi la note à la suite de l'article.)

§ Dans les *C. R.* du 20 février, M. Sylvester démontre qu'il n'y a pas nombre parfait impair avec quatre éléments et annonce qu'il a prouvé qu'il n'en existe pas même avec cinq éléments.

|| *Commentationes arithm. coll.*, p. 514, no. 107 (cité par M. Sylvester, *Nature*, 15 déc. 1887, p. 152). Voir une autre démonstration due à M. Lucas, dans *Mathesis*, t. VI. pp. 146—147.

au moins un facteur différent de 3, 5, 11. En effet, ce nombre $\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}$ s'il n'est pas divisible par 11, introduit un autre facteur que 3, 5, 11, puisqu'il est premier avec 3, 5, 11. D'autre part, s'il est divisible par 11, il est aussi divisible par 71 ; car on a

$$
\begin{array}{ll}
5-1=4, & 5^{5(2p+1)-4}-1=\mathfrak{M}\,11+4, \\
5^3-1=\mathfrak{M}\,11+3, & 5^{5(2p+1)-2}-1=\mathfrak{M}\,11+3, \\
5^5-1=4\,.\,11\,.\,71, & 5^{5(2p+1)}\;-1=\mathfrak{M}\,(5^5-1)=\mathfrak{M}\,71, \\
5^7-1=\mathfrak{M}\,11+2, & 5^{5(2p+1)+2}-1=\mathfrak{M}\,11+2, \\
5^9-1=\mathfrak{M}\,11+8, & 5^{5(2p+1)+4}-1=\mathfrak{M}\,11+8.
\end{array}
$$

P. Mansion.