57.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE L'EXISTENCE D'UN NOMBRE PARFAIT IMPAIR QUI NE CONTIENT PAS AU MOINS 5 DIVISEURS PREMIERS DISTINCTS.

[*Comptes Rendus*, CVI. (1888), pp. 522—526.]

NOUS avons vu, dans une Note précédente, qu'un nombre parfait impair avec moins de 7 facteurs doit être divisible par 3, et aussi que nul nombre parfait ne peut être divisible par 105. Ajoutons que, puisque

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}=\frac{151\frac{15}{16}}{80}<2$$

et que, en changeant 11, 13, 17 pour d'autres éléments, on ne peut diminuer ce produit qu'en empiétant sur les chiffres 5 ou 7, il s'ensuit que l'élément 3 doit être associé ou avec 7 ou avec 5 dans un nombre parfait à quatre éléments, s'il y en a.

Supposons donc qu'un tel nombre N existe.

(1) Soient 3 et 7 deux de ses éléments. Le troisième élément en ordre de grandeur ne peut pas excéder 13 ; car

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}=\frac{119}{64}\left(1+\frac{1}{18}\right)<\frac{126}{64}<2.$$

(α) Soit 11 le troisième élément ; puisque

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{29}{28}=\frac{77}{40}\left(1+\frac{1}{28}\right)<2,$$

on voit que le quatrième élément ne peut être qu'un des nombres 13, 17, 19, 23.

Mais, parmi les éléments, un au moins doit être de la forme $4x+1$.

De plus, nous avons vu dans une Note précédente que *nul* nombre parfait ne peut contenir l'élément 17 sans contenir en même temps un élément pas plus petit que 67. Donc les quatre éléments seront 3, 7, 11, 13.

Le diviseur-somme* à 7 ne peut pas contenir le facteur algébrique $7^9 - 1$, car alors $\frac{1}{3} \cdot \frac{7^3-1}{7-1}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{7^9-1}{7^3-1}$ seront diviseurs de cette somme premiers entre eux, à 3 et à 7, et en plus ne contenant pas 13 parce que 13 n'est ni une fonction unilinéaire† de q ni diviseur de $7^3 - 1$. Ainsi sur cette supposition il y aurait au moins cinq éléments distincts. Donc le diviseur-somme à 7 ne peut pas contenir 9, mais le component à 3 contient nécessairement 3^2; conséquemment, puisque le diviseur-somme à 11 (élément ordinaire et non pas de la forme $3x+1$) ne peut pas contenir 3, le diviseur-somme à 13 contiendra un facteur algébrique de la forme $\frac{13^3-1}{13-1}$ qui est égal à $169+13+1$. Donc 61 sera un élément en plus de 3, 7, 11, 13 qui est contraire à l'hypothèse.

1. (β) Soit 13 le troisième élément.

Puisque $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{23}{22} = \frac{91}{48}\left(1+\frac{1}{22}\right) < 2$, le quatrième élément sera necessairement moins que 23, et le système des éléments sera 3, 7, 13, 19, car 17 est exclus.

Les diviseurs-sommes, ni à 13 ni à 19, ne peuvent pas contenir 3; parce qu'ils contiendraient nécessairement les facteurs $\frac{13^3-1}{13-1}$ et $\frac{19^3-1}{19-1}$, et ainsi $\frac{1+13+13^2}{3}$, c'est-à-dire 61, et $\frac{1+19+19^2}{3}$, c'est-à-dire 127.

Donc le diviseur-somme à 7 doit contenir algébriquement les facteurs $\frac{1}{3} \cdot \frac{7^9-1}{7^3-1}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{7^3-1}{7-1}$; ce dernier est égal à 19; le premier sera nécessairement premier à 3, 7, 19 et, pour la raison déjà donnée, à 13.

Il est donc démontré que 7 ne peut pas être un élément de N.

(2) Supposons que 3 et 5 sont deux de ses éléments.

2. A. Soit 5 l'élément exceptionnel.

2. A (α). Si l'indice à l'élément 3 est 2, alors, puisque $1+3+3^2=13$, on aura les éléments 3, 5, 13; donc le diviseur-somme à 13 doit contenir 3, et, conséquemment, contiendra algébriquement le facteur $\frac{13^2+13+1}{3}$, c'est-à-dire 61.

Ainsi on aura les éléments 3, 5, 13, 61.

Mais $\frac{1+3+3^2}{9} \cdot \frac{1+5}{5} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{61}{60} < 2$, ce qui est inadmissible.

* Si p est un élément et p^i un *component* d'un nombre N, on nomme p^i le *component* à p, et $\frac{p^{i+1}-1}{p-1}$ le *diviseur-somme* à p.

† Il est très commode, dans ce genre de recherches, de se servir de la phrase "fonction unilinéaire de x" pour signifier $kx+1$.

2. A (β). On peut donc supposer l'indice du component à 3 au moins 4.

Soient 3, 5, p les trois éléments; l'indice du diviseur-somme à p ne peut pas être 9, car alors on aurait en plus de 3, 5, p deux autres éléments au moins premiers entre eux et à 3, 5, p.

Soit q le quatrième élément; la même chose sera vraie du diviseur-somme à q.

Donc le produit des diviseurs-sommes à 3, 5, p, q ne peut pas contenir une plus haute puissance de 3 que 3^3; mais elle doit contenir au moins 3^4.

Ainsi l'hypothèse que 5 est l'élément exceptionnel est inadmissible.

2. B. Passons à l'hypothèse que 5 est un élément ordinaire.

Remarquons que $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{37}{36} < 1{,}992 < 2.$

Conséquemment, il y aura au moins un élément, disons p, qui n'excède pas 29 : je dis que p ne peut pas être contenu dans le diviseur-somme de 5 ; car, si cela avait lieu, l'indice de cette somme serait nécessairement un diviseur impair de l'excès au-dessus de l'unité de quelque nombre premier inférieur à 31, c'est-à-dire 3, 5, 7, 9 ou 11, dont les quatre derniers correspondent respectivement aux nombres premiers 11, 29, 19 et 23.

Il ne peut pas être 3, car $\frac{5^3-1}{5-1} = 31$; ni 5, car $\frac{5^5-1}{5-1} = 11 \,.\, 71$ (et l'on aurait une combinaison d'éléments 3, 5, 11, 71; laquelle est inadmissible, parce que 5 est, par hypothèse, non exceptionnel, et les autres éléments sont de la forme $4x+3$).

Il ne peut pas être 7, car on trouve facilement que 5^7-1 ne contient pas 29 ni 9; car, quoiqu'il soit vrai que (5 étant résidu quadratique de 19) 5^9-1 contient 19, il contient en même temps 5^3-1, et l'on aurait la combinaison 3, 5, 19, 31, qui est défendue par la même raison que l'est 3, 5, 11, 71.

Reste seulement 11, mais $5^{11}-1$ ne peut pas contenir 23, parce que 5 n'est pas résidu quadratique de 23.

Ainsi l'élément 5 ne peut pas *engendrer* (au moyen du diviseur-somme qui lui répond) un élément qui n'est pas en dehors de la limite 29.

Le diviseur-somme à un tel élément (s'il est 11 et seulement dans ce cas-là) peut contenir 5, mais non pas 5^2; car, s'il contenait 5^2, on aurait au moins deux diviseurs de cette somme premiers entre eux et à 3, 5, 11.

Remarquons que le component à l'élément exceptionnel ne peut pas être une puissance (à exponent $4j+1$) d'un nombre; car, si $j>0$, $q^{4j+2}-1$ contiendrait nécessairement deux facteurs premiers distincts en addition à 3, 5 et p; donc $j=0$; ainsi l'on voit que $q+1$ doit contenir au moins les puissances de 3 et 5 contenues en $3^2 \,.\, 5^2$, qui ne sont pas contenues dans le diviseur-somme de l'autre élément indéterminé, lequel on montre facilement ne pouvoir contenir que 3 ou 5 et non pas 3^2, $3 . 5$, ou 5^2; car, sur la première ou la dernière de ces trois hypothèses, le nombre des éléments serait plus grand que 4, et sur l'hypothèse qui reste plus grand même que 5. Donc l'élément exceptionnel augmenté par l'unité sera de la forme ou $2k . 3^2 . 5 - 1$ ou $2k . 3 . 5^2 - 1$: conséquemment sa valeur doit excéder 89; cela prouve que le p dont nous avons parlé n'est pas l'élément exceptionnel.

Soit q cet élément, on aura

$$q = 30\lambda - 1.$$

Or le diviseur-somme à 5 ne contient ni 3 ni p.

On aura donc forcément

$$\frac{5^x - 1}{5 - 1} = q = 30\lambda - 1,$$

c'est-à-dire $$5^x - 120\lambda + 3 = 0,$$
ce qui est impossible.

Cela démontre que l'hypothèse 2. B est inadmissible, et finalement le résultat est acquis qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs qui soient divisibles par moins de 5 facteurs premiers; car ce théorème, pour les cas d'une multiplicité 3, 2, 1, a déjà été démontré.

Ajoutons quelques mots sur les nombres parfaits à cinq éléments.

Ici, puisque

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{23}{22} < 1{,}986,$$

mais $$\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} > 2{,}004.$$

On voit qu'un nombre parfait à cinq éléments, où 5 et 7 manquent, ne peut avoir pour ces éléments que les chiffres 3, 11, 13, 17, 19.

Mais 17 (un nombre cyclotomique de Gauss) ne peut pas exister sans un élément satellite de la forme $17k \pm 1$. Donc un nombre parfait à cinq éléments, s'il existe, aura nécessairement ou les éléments 3, 5 ou les éléments 3, 7.

J'ai réussi à démontrer l'impossibilité de l'une et de l'autre de ces hypothèses; mais la preuve est trop longue pour être insérée ici.