# 52.

## SUR LES NOMBRES DITS DE HAMILTON.

[*Compte Rendu de l'Assoc. Française* (*Toulouse*), 1887, pp. 164—168.]

CONSIDÉRONS ce tableau formé en bas par un procédé qui à peu près s'explique de soi-même :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | .... |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | .... |
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | .... |
| | | 1 | 5 | 9 | 14 | 20 | .... |
| | | | 6 | 15 | 29 | 49 | ... |
| | | | 5 | 21 | 50 | 89 | ... |
| | | | 4 | 26 | 76 | 175 | ... |
| | | | 3 | 30 | 106 | 231 | ... |
| | | | 2 | 33 | 139 | 420 | ... |
| | | | 1 | 35 | 174 | 594 | ... |
| | | | | 36 | 210 | 804 | ... |
| | | | | . | . | . | ... |
| | | | | . | . | . | ... |

Ce tableau peut être étendu indéfiniment.

On voit qu'il se divise en étages et que les nombres initiaux des premières lignes de ces étages sont :

$$1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 36.$$

En les additionnant et en ajoutant l'unité aux sommes, on obtient les nombres 2, 3, 5, 11, 47 ....

Ces nombres sont ce que j'appelle les nombres de Hamilton qui a trouvé les nombres 11, 47, et encore le nombre qui vient après 47, c'est-à-dire 923, dans un rapport qu'il a publié dans les *Reports of the British Association* 1836, sur la méthode de Jerrard pour réduire les équations du cinquième degré, méthode qui remonte, en effet, à Bring, professeur à Lund, qui l'a publié dans un opuscule en 1786 qui restait inconnu ou oublié. De même qu'on peut ôter 3 termes d'une équation dont le degré est au moins 5 sans résoudre aucune équation d'un degré supérieur à 3, de même aussi on peut ôter 4 termes d'une équation dont le degré est au moins 11 sans résoudre des équations d'un degré supérieur à 4; 5 termes d'une équation dont le degré est au moins 47 sans résoudre des équations d'un degré supérieur à 5 et ainsi de suite.

Mais il est nécessaire d'avertir ici que la même chose aura lieu pour des équations de degrés moindres, en général, que ceux fournis par les nombres de Hamilton. En effet, au lieu de 11, 47, 923 ... on peut substituer 10, 44, 905 ...: mais le système d'équations résolvantes deviendra plus compliqué quand on fait cette diminution du degré minimum. Ainsi, par exemple, il est bien vrai que pour ôter 4 termes à une équation du degré 10, le système d'équations à résoudre ne contiendra nulle équation d'un degré supérieur à 4: mais il y aura 3 équations de ce degré à résoudre tandis que quand l'équation donnée est du degré 11 ou plus haut que 11, on n'aura à résoudre (en combinaison bien entendu avec des équations cubiques quadratiques et linéaires) qu'une seule équation biquadratique au lieu de trois: et ainsi en général.

Pour trouver les nombres de Hamilton, mon coadjuteur, M. Hammond a trouvé une échelle de relation d'une simplicité merveilleuse.

On peut former avec les lignes successives du tableau les fonctions

$$\begin{array}{rll}
1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 \ldots & \text{disons} & F_0 \text{ (qui en effet est l'unité).} \\
x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots & \text{,,} & F_1 \\
2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \ldots & \text{,,} & F_2 \\
x^2 + 5x^3 + 9x^4 \ldots & \text{,,} & {}^1F_2 \\
6x^3 + 15x^4 \ldots & \text{,,} & {}^2F_2 = F_3 \\
5x^3 + 21x^4 \ldots & \text{,,} & {}^1F_3 \\
4x^3 + 26x^4 \ldots & \text{,,} & {}^2F_3 \\
3x^3 + 30x^4 \ldots & \text{,,} & {}^3F_3 \\
2x^3 + 35x^4 \ldots & \text{,,} & {}^4F_3 \\
x^3 + 35x^5 \ldots & \text{,,} & {}^5F_3 \\
36x^5 \ldots & \text{,,} & {}^6F_3 = F_4
\end{array}$$

et ainsi de suite.

Donnons à 1, 1, 2, 6, 36 ... les noms $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ ... alors il est facile à voir qu'en général ${}^nF_n = F_{n+1}$; mais aussi on voit que

$$ {}^{i+1}F_n = (1-x)^{-1}\, {}^iF_n - x^n. $$

Donc

$$\begin{aligned}
F_{n+1} - (1-x)^{-a_n} . F_n &= -x^n \{1 + (1-x)^{-1} + (1-x)^{-2} + \ldots + (1-x)^{-a_n+1}\} \\
&= x^{n-1} \{(1-x) - (1-x)^{-a_n+1}\}.
\end{aligned}$$

Faisons $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{n+1}$ alors en multipliant l'équation par $(1-x)^{S_{n+1}}$, on obtient:

$$ (1-x)^{S_{n+1}} . F_{n+1} - (1-x)^{S_n} . F_n = x^n (1-x)^{S_{n+1}+1} - x^n (1-x)^{S_{n+1}}. $$

Cette équation qui existe pour toutes les valeurs $S_n$ jusqu'à $S_1$ exclusif reste vraie comme identité même pour $S_0$ si on met $S_0 = 0$. Alors en donnant à $n$ toutes les valeurs depuis $n-1$ jusqu'à 0 inclusivement et en faisant la sommation des équations ainsi formées, on obtient facilement:

$$(1-x)^{S_n} F_n - 1 + x^{-1}(1-x) - x^{n-1}(1-x)^{S_n+1}$$
$$= x^{n-2}(1-x)^{S_n+2} + x^{n-3}(1-x)^{S_{n-1}+2} + x^{n-n}(1-x)^{S_{n-n}+2} + \ldots.$$

Si dans cette équation on compare les coefficients de $x^n$ en se rappelant que le coefficient de $x^n$ en $F_n$ est $a_n$, c'est-à-dire $S_{n+1} - S_n$, et que $S_n + 1$ est le nombre $n^{\text{me}}$ de M. Hamilton, de sorte que $S_n + 2$ que je nommerai $E_n$ est ce nombre augmenté de l'unité, on trouve:

$$E_{n+1} = 1 + E_n . \frac{E_n - 1}{2} - \frac{E_{n-1}(E_{n-1}-1)(E_{n-1}-2)}{2 . 3} + \ldots$$

formule de relation entre les nombres de Hamilton qu'on peut écrire sous la forme symétrique

$$1 - (E_n)_1 + (E_{n-1})_2 - (E_{n-2})_3 \ldots = 0.$$

En augmentant les nombres de Hamilton de l'unité, on obtient pour $E$ les valeurs successives

3, 4, 6, 12, 48, 924

qu'on trouve très facilement par la formule de la relation donnée.

Ainsi par exemple:

$$\frac{3.2}{2} = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{4.3}{2} - \frac{3.2.1}{1.2.3} = 6 - 1 = 5$$

$$\frac{6.5}{2} - \frac{4.3.2}{1.2.3} = 12 - 1 = 11$$

$$\frac{12.11}{2} - \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 48 - 1 = 47$$

$$\frac{48.47}{2} - \frac{12.11.10}{1.2.3} + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 924 - 1 = 923$$

$$\frac{924.923}{2} - \frac{48.67.44}{2.3} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} - \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 409620 - 1 = 409619.$$

Les nombres de Hamilton ainsi calculés sont:

2, 3, 5, 11, 47, 923, 409619, 83763206255 ...

où comme première approximation asymptotique on peut remarquer que si $u_x$ est le nombre de rang $x$, $u_{2+1} \div u_2^2$ devient de plus en plus près de $\delta$ mais toujours moindre que l'unité quand $x$ croît indéfiniment.

Telle est la formule bien remarquable trouvée par M. Hammond, dont j'ai un peu simplifié et abrégé la démonstration.

Un travail sur les nombres de Hamilton, fait par M. Hammond et moi-même va prochainement paraître dans les *Philosophical Transactions* [above, p. 553].