47.

SUR UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE CLEBSCH RELATIF AUX COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

[*Comptes Rendus*, CII. (1886), pp. 1532—1534.]

EN appliquant un terme quelconque du développement de

$$(\delta_x, \delta_y, \delta_z, \ldots)^\eta$$

au quantic $(x, y, z, \ldots)^{2\eta}$, on obtient autant de fonctions de degré η qu'il y a de termes dans chaque fonction. L'ensemble de leurs coefficients peut donc être regardé comme la matrice d'un déterminant auquel nous donnerons le même nom de *catalecticant*, dont on fait usage dans le cas des formes binaires.

On voit très aisément que la matrice catalectique, pour une puissance d'une fonction linéaire de variables, possède cette propriété que chaque déterminant mineur du second ordre qu'elle contient s'évanouit. Conséquemment, deux colonnes quelconques d'une telle matrice, associées à d'autres colonnes arbitraires, en nombre suffisant pour former une matrice carrée nouvelle, feront s'évanouir le déterminant de cette dernière.

Or la matrice catalectique d'une somme de puissances de fonctions linéaires des mêmes variables est la somme des matrices qui appartiennent à chacune prise séparément; donc, comme conséquence immédiate de cette propriété dont nous avons parlé, si le nombre de ces matrices est moindre que l'ordre de chacune, le déterminant de leur somme s'évanouira, car il pourra être résolu dans une somme de déterminants dont chacun aura la valeur zéro*.

* S'il y a n matrices, chacune de l'ordre N (de sorte que N est le nombre des colonnes dans chaque matrice), on associera à volonté la première colonne d'une quelconque des n matrices avec la seconde, avec la troisième, etc. colonne, prises ou dans la même ou dans aucune autre matrice, en sorte que le nombre des nouvelles matrices partielles sera n^N. Il est évident que, N étant par hypothèse plus grand que n, deux colonnes *au moins* de chaque matrice ainsi formée appartiendront à une même matrice fondamentale, c'est-à-dire à la matrice catalectique d'une puissance d'une fonction linéaire des variables. Voilà la raison pour laquelle chacun des n^N déterminants partiels est égal à zéro.

(1) Prenons deux variables. Le catalecticant sera de l'ordre $\eta + 1$; on retrouve ainsi cette règle bien connue, et qui ne contient rien d'exceptionnel ni de paradoxal : pour qu'une forme binaire d'ordre 2η soit équivalente à la somme de η puissances de fonctions linéaires, il faut que le catalecticant de la forme soit nul.

(2) Prenons trois variables et faisons $\eta = 2$: l'ordre du déterminant catalectique de $(ax + by + cz)^4$ étant 6, le catalecticant de

$$\sum_{\theta=5}^{\theta=1} (a_\theta x + b_\theta y + c_\theta z)^4 = 0.$$

Cela donne le théorème de Clebsch, à savoir que le premier membre de l'équation d'une courbe du quatrième degré n'est pas, en général, exprimable en une somme de cinq puissances de fonctions linéaires des variables.

(3) Prenons cinq variables, en faisant encore $\eta = 2$. L'ordre du déterminant catalectique $(ax + by + cz + dt + eu)^4$ étant 15, le catalecticant de

$$\sum_{\theta=14}^{\theta=1} (a_\theta x + b_\theta y + c_\theta z + d_\theta t + e_\theta u)^4$$

s'évanouit.

Or $5 \times 14 = 70$, ce qui est justement le nombre $\dfrac{5.6.7.8}{1.2.3.4}$ des coefficients de $(x, y, z, t, u)^4$.

On arrive ainsi à cette conclusion nouvelle, et un peu paradoxale, que l'équation d'une hypersurface du quatrième degré, bien que contenant le même nombre de constantes que la somme de 14 puissances biquadratiques de fonctions linéaires des variables, ne peut pas en général être exprimée comme une telle somme ; car, pour que cela fût possible, il faudrait que le catalecticant de l'hypersurface s'évanouît.

(4) Prenons encore $\eta = 2$, et considérons la somme de 9 puissances quatrièmes de fonctions linéaires de x, y, z, t. Le catalecticant de cette somme sera de l'ordre 10 et, conséquemment, zéro.

Donc le premier membre de l'équation d'une surface du quatrième degré qui ne contient que 35 constantes ne peut pas en général être mis sous la forme d'une somme de 9 puissances de fonctions linéaires des variables, quoique cette somme contienne 36 constantes disponibles.

Ce résultat pour les surfaces est, on le voit, un peu plus *paradoxal*, en apparence, que le théorème de Clebsch, sur les courbes du quatrième degré, quoiqu'en effet il n'y ait aucun paradoxe, ni dans l'un ni dans l'autre de ces théorèmes, pour ceux qui sont convaincus qu'on ne doit jamais se fier, sans contrôle, aux conclusions apparentes, fournies par la comparaison numérique de constantes.