45.

NOTE SUR LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS.

[*Comptes Rendus*, CII. (1886), pp. 31—34.]

En affirmant, dans notre Lettre à M. Hermite (dont un Extrait a paru dans les *Comptes rendus*), que les invariants différentiels de M. Halphen sont identiques avec nos réciprocants purs, nous sommes allé trop loin ; nous aurions dû dire qu'ils sont identiques avec la classe spéciale de ces derniers que nous avons nommés *réciprocants projectifs* ; en effet, en prenant pour *éléments*

$$\frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots,$$

regardés comme quantités algébriques, lesquelles on peut nommer (selon l'usage quand on parle de formes binaires) $a, b, c, d, \ldots$, un invariant différentiel possède la propriété vraiment étonnante d'être en même temps un réciprocant et un sous-invariant ordinaire.

En accommodant la valeur de V à cette notation nouvelle, il devient

$$4aa\delta_b + 5\,(ab + ba)\,\delta_c + 6\,(ac + bb + ca)\,\delta_d,\quad \ldots;$$

et, en posant $$a\delta_b + 2b\delta_c + 3c\delta_d + \ldots = \Omega,$$

un invariant différentiel I satisfait en même temps aux deux équations partielles différentielles

$$V\,.\,I = 0,\qquad \Omega\,.\,I = 0.$$

Voici comment on peut établir le fait que $\Omega\,.\,I = 0$.

En commençant avec les trois premiers invariants différentiels, c'est-à-dire a, $a^2d - 3abc + 2b^3$, et le Δ de M. Halphen (dans sa thèse immortelle), on sait que les deux premiers, et l'on vérifie sans trop de peine que le troisième sont tous les trois des sous-invariants.

De plus, on sait que, en commençant avec ces trois invariants que nous nommerons I_0, I_1, I_2, on peut former une suite indéfinie de formes protomorphiques

$$I_0, \quad I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \ldots, \quad I_p, \quad \ldots,$$

dont tous les autres seront des fonctions rationnelles.

Pour obtenir cette suite, on n'a qu'à former une fonction J de $I_0, I_1, \ldots, I_p, \ldots$, dont le degré et le poids soient tous deux zéro ; en opérant alors sur J (considéré comme fonction des dérivées de y par rapport à x) avec δ_x, on obtient I_{p+1}.

Si donc on peut démontrer que $\Omega\delta_x J = \delta_x \Omega J$, il s'ensuivra que I_{p+1} sera un sous-invariant, pourvu que I_p en soit un, et le théorème en question sera démontré.

Or remarquons en premier lieu que, à cause de la valeur zéro du degré et du poids de J, la quantité

$$(\lambda a\delta_a + \mu b\delta_b + \nu c\delta_c + \ldots)\, J$$

sera nulle si λ, μ, ν, ... forment une progression arithmétique quelconque ; et, en second lieu, que (par rapport à une fonction de dérivées de J par rapport à x), $\delta_x = 3b\delta_a + 4c\delta_b + 5d\delta_c + \ldots$ identiquement.

Conséquemment

$$\begin{aligned}(\Omega\delta_x - \delta_x\Omega)\, J &= [(3a\delta_a + 8b\delta_b + 15c\delta_c + \ldots) - (3b\delta_b + 8c\delta_c + \ldots)]\, J \\ &= (3a\delta_a + 5b\delta_b + 7c\delta_c + \ldots)\, J = 0,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

M. Halphen, à qui j'avais communiqué ce résultat, en a trouvé une tout autre démonstration qu'il m'autorise à communiquer à l'Académie. Elle possède sur la mienne l'avantage d'aller plus au fond de la question, en faisant voir que l'équation $\Omega . I = 0$ équivaut à dire que, en se servant de x, y, z au lieu de x, y, 1, un invariant différentiel peut subir le changement entre eux de x et z. Or, puisque $V . I = 0$ signifie qu'on peut imposer des substitutions linéaires quelconques sur x et y, il s'ensuit, en combinant les deux équations, que la même chose aura lieu quand x, y, z subissent tous les trois des substitutions linéaires quelconques. Voici la démonstration très élégante de M. Halphen :

" Si l'on fait le changement de variables

$$X = \frac{1}{x}, \quad Y = \frac{y}{x},$$

et qu'on écrive

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}, \quad \ldots,$$

on a $Y = +x^{-1}y,$

$$\frac{dY}{dX} = -x^{+1}\left(y' - \frac{1}{x}y\right),$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = +x^3y'',$$

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = -x^5\left(y''' + \frac{3}{x}y''\right),$$

$$\frac{d^4Y}{dX^4} = +x^7\left(y^{\text{IV}} + \frac{8}{x}y''' + \frac{12}{x^2}y''\right),$$

$$\frac{d^5Y}{dX^5} = -x^9\left(y^{\text{V}} + \frac{15}{x}y^{\text{IV}} + \frac{60}{x^2}y''' + \frac{60}{x^3}y''\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^nY}{dX^n} = (-1)^n x^{2n-1}\left[y^{(n)} + \frac{n(n-2)}{x}y^{(n-1)} + \frac{\alpha}{x^2}y^{(n-2)} + \frac{\beta}{x^3}y^{(n-3)} + \ldots\right].$$

"Posant $\qquad \dfrac{d^nY}{dX^n} = n'A_n, \quad \dfrac{d^ny}{dx^n} = n'a_n, \quad \dfrac{1}{x} = \epsilon,$

on a $\qquad A_n = (-1)^n x^{2n-1}[a_n + (n-2)\epsilon a_{n-1} + \alpha'\epsilon^2 a_{n-2} + \ldots].$

"Soit une fonction $f(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ dont tous les termes soient de poids et de degré constants p, δ ; en supposant ϵ infiniment petit, on aura

$$f(A_0, A_1, \ldots, A_n) = (-1)^p x^{2p-\delta}\left\{f(a_0, a_1, \ldots, a_n)\right.$$
$$\left. + \epsilon\left[-a_0\frac{\partial f}{\partial a_1} + 2a_2\frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3\frac{\partial f}{\partial a_4} + \ldots + (n-2)a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n}\right]\right\}.$$

"Donc, pour que f soit invariant pour la substitution considérée, il faut qu'on ait

$$a_2\frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3\frac{\partial f}{\partial a_4} + 3a_4\frac{\partial f}{\partial a_5} + \ldots + (n-2)a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n} = a_0\frac{\partial f}{\partial a_1}.$$

"En particulier, si f ne contient pas a_1, ce qui est le cas des *réciprocants purs*, on aura

$$a_2\frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3\frac{\partial f}{\partial a_4} + \ldots + (n-2)a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n} = 0. \qquad \text{C.Q.F.D.''}$$

Ainsi, l'on voit qu'un invariant différentiel est en même temps réciprocant et sous-invariant ; ce n'est nullement un mélange ou une combinaison de deux choses différentes, mais plutôt, pour ainsi dire, une personnalité seule et indivisible douée de deux natures tout à fait distinctes.

Afin de compléter la théorie, il faut démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute forme douée de ces deux natures est un réciprocant projectif. M. Halphen effectue cela en trouvant le développement complet de sa série et en faisant voir que, quand le coefficient de la première puissance de ϵ disparaît, la même chose aura lieu pour tous les coefficients suivants. Voici notre méthode, à nous de l'effectuer.

Soit H une forme rationnelle et entière dont le terme principal (c'est-à-dire celui qui contient la plus haute puissance du terme le plus avancé) est Gh^i. On suppose que le théorème à démontrer est vrai jusqu'à la lettre g incluse, et que $VA = 0$, $\Omega H = 0$ sans que H soit projectif.

Alors évidemment $VG = 0$, $\Omega G = 0$ et G, par hypothèse, sera projectif. Soit H' une puissance d'un protomorphe pour laquelle le terme principal est $G'h^i$, alors, si $H_1 = G'H - GH'$, G, G', H' sont projectifs, mais H non projectif; donc, H_1 (qui, comme H, est anéanti par V et par Ω) sera non projectif: de plus, dans H_1 le degré du terme principal en h est abaissé. De la même manière on peut construire H_2, H_3, ... jusqu'à ce qu'on parvienne à une forme* qui ne contient pas h, laquelle possédera les mêmes caractères que H, ce qui est impossible par hypothèse. Donc, si le théorème à démontrer est vrai pour un nombre quelconque donné de lettres, il sera vrai universellement: mais il est évidemment vrai pour la fonction a qui est le seul réciprocant à une lettre. Donc, si $VI = 0$ et $RI = 0$, I est un réciprocant projectif, c'est-à-dire un invariant différentiel. Ce qui était à démontrer.

* Cette forme sera, en effet, le résultant de H et de la première puissance du protomorphe. Nous avons jugé inutile de dire dans le texte que G', comme G, sera anéanti par V et par Ω et conséquemment, par hypothèse, sera lui aussi projectif.