

SUR UNE EXTENSION DU THÉORÈME RELATIF AU NOMBRE
D'INVARIANTS ASYZYGÉTIQUES D'UN TYPE DONNÉ À
UNE CLASSE DE FORMES ANALOGUES.

[*Comptes Rendus*, CII. (1886), pp. 1430—1435.]

[Cf. p. 459, above.]

NOUS employons toujours aujourd'hui le mot *invariant* pour désigner les sous-invariants et les invariants (ainsi ordinairement nommés) sans distinction.

Le type d'un invariant est l'ensemble de trois éléments, le poids, le degré et l'étendue, que nous désignerons ordinairement par les lettres w, i, j , et nous nous servons de cet ensemble entre parenthèses ($w : i, j$) pour signifier le nombre de manières de composer w avec i des chiffres 0, 1, 2, ..., j ou bien, ce qui revient au même, avec j des chiffres 0, 1, 2, ..., i .

Il est quelquefois utile d'ajouter à ces trois éléments un autre dont il est fonction, à savoir l'*excès* qu'on prend égal à $ij - 2w$.

Quand on considère un invariant comme source d'un covariant, l'*excès* coïncide avec l'ordre dans les variables de ce dernier.

Le théorème connu, dont nous parlons dans le titre de cette Note, se divise en deux parties :

- (1) Il n'existe aucun invariant dont l'*excès* du type soit négatif ;
- (2) Quand l'*excès* est positif, le nombre des invariants asyzygétiques du type $w : i, j$ est $(w : i, j) - (w - 1 : i, j)$ qu'on peut représenter par $\Delta(w : i, j)$.

Évidemment, ces résultats peuvent être étendus au cas des formes rationnelles et entières qui sont *anéanties* par l'opérateur

$$\lambda_1 a_0 \delta_{a_1} + \lambda_2 a_1 \delta_{a_2} + \dots + \lambda_j a_{j-1} \delta_{a_j},$$

pourvu qu'aucun des λ ne soit nul ; car alors, en remplaçant les a par des multiples numériques convenables, l'*anéantisseur* peut être changé dans la forme $a_0 \delta_a + 2a_1 \delta_{a_2} + \dots + ja_{j-1} \delta_{a_j}$.

Quand tous les λ dans l'opérateur sont pris égaux à l'unité, on peut donner aux formes qu'il anéantit le nom de *binariants*.

en posant $\theta_1 = a_0 \delta_{a_2} + a_2 \delta_{a_4} + a_4 \delta_{a_6} + \dots + a_{2\eta-2} \delta_{a_{2\eta}},$

$$\theta_2 = a_1 \delta_{a_3} + a_3 \delta_{a_5} + \dots + a_{2\eta-3} \delta_{a_{2\eta-1}}.$$

En faisant $t = t_1 + t_2,$

avec $t_1 = 1 \cdot \eta a_2 \delta_{a_0} + 2(\eta - 1) a_4 \delta_{a_2} + 3(\eta - 2) a_6 \delta_{a_4} + \dots + \eta \cdot 1 \cdot a_{2\eta} \delta_{a_{2\eta-2}},$

$$t_2 = 1(\eta - 1) a_3 \delta_{a_1} + 2(\eta - 2) a_5 \delta_{a_3} + \dots + (\eta - 1) 1 \cdot a_{2\eta-1} \delta_{a_{2\eta-3}},$$

on trouvera

$$\theta_1 t_1 - t_1 \theta_1 = \eta a_0 \delta_{a_0} + (\eta - 2) a_2 \delta_{a_2} + \dots - (\eta - 2) a_{2\eta-2} \delta_{a_{2\eta-2}} - \eta a_{2\eta} \delta_{a_{2\eta}},$$

$$\theta_2 t_2 - t_2 \theta_2 = (\eta - 1) a_1 \delta_{a_1} + (\eta - 3) a_3 \delta_{a_3} + \dots - (\eta - 1) a_{2\eta-1} \delta_{a_{2\eta-1}}.$$

Donc, si I est une fonction homogène et isobarique dans les lettres a du type $w; i, j,$ on aura

$$\begin{aligned} (\Theta T - T \Theta) I &= [\eta a_0 \delta_{a_0} + (\eta - 1) a_1 \delta_{a_1} + \dots - (\eta - 1) a_{2\eta-1} \delta_{a_{2\eta-1}} - \eta a_{2\eta} \delta_{a_{2\eta}}] I \\ &= (i\eta - j) I = \frac{2\eta i - 2w}{2} I; \end{aligned}$$

car on remarquera que ni l'un ni l'autre θ n'agit sur l'un ou l'autre t , et que ni l'un ni l'autre t n'agit sur l'un ou l'autre θ .

Le coefficient de I , on le remarquera, est la moitié de l'excès au type $w; i, 2\eta$.

Il est bon d'observer qu'il n'est pas possible d'obtenir un résultat semblable dans le cas où j est impair, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver, dans ce cas, une forme T telle que le résultat de l'opération $(\Theta T - T \Theta)$ sur une forme homogène et isobarique soit équivalent au produit de cette forme par une fonction quelconque de $w; i, j$.

Avec l'aide de la formule ci-dessus, suivant la même marche que nous avons prise pour les invariants dans le *Philosophical Magazine* * (mars 1878), on parvient à des résultats tout à fait semblables.

En appelant ϵ la moitié de l'excès et en supposant que I est un transbinariant, on trouve

$$\epsilon I = \Theta T I$$

et, plus généralement,

$$\mu T^{q-1} I = \Theta T^q I,$$

où $\mu = q(\epsilon - q + 1)$.

Or il est évident que, puisque l'effet de T est d'augmenter (par deux unités) le poids de la forme sur laquelle il agit sans en changer le degré ni l'étendue, et que le poids d'une forme homogène et isobarique ne peut pas excéder le produit du degré par l'étendue, en prenant q suffisamment grand, on aura

$$T I = 0,$$

et, à plus forte raison,

$$\Theta T I = 0.$$

On trouvera donc successivement $T^{q-1} I = 0, T^{q-2} I = 0, \dots, T I = 0, I = 0,$ pourvu que le μ ne devienne pas nul dans le cours de cette déduction: ceci

[* Vol. III. of this Reprint, p. 117.]

ne peut pas arriver quand ϵ est négatif, car on trouvera que les valeurs de μ , dans ce cas, resteront toujours négatives.

Cela démontre qu'un transbinariant, dont le type a un excès négatif, ne peut pas être autre que zéro, c'est-à-dire n'a pas d'existence actuelle quand l'excès est non négatif; en désignant par $E(w : i, j)$ le nombre

$$(w : i, j) - (w - 2 : i, j),$$

et par $D(w : i, j)$ le nombre de transbinariants du type $(w : i, j)$, on prouve que $D(w : i, j) = E(w : i, j)$ de la manière suivante.

En remarquant que, pour w négatif, $E(w : i, j) = 0$, on trouve immédiatement

$$\sum_{q=-\infty}^{q=0} E(w - 2q : i, j) = (w : i, j),$$

et, puisque chaque D est au moins égal au E correspondant, on a

$$\sum_{q=-\infty}^{q=0} D(w - 2q : i, j) \geq (w : i, j).$$

Or on peut démontrer facilement que, si $ij - 2w$ est non négatif, en appelant $I_{w:i,j}$ un transbinariant du type $(w : i, j)$, $\Theta^q T^q I_{w-2q:i,j}$ sera égal à un multiple numérique de $I_{w-2q:i,j}$ différent de zéro pour toutes les valeurs de q qu'on a besoin de considérer.

Or, dans l'ensemble des transbinariants aszygétiques, dont le type est $w - 2q : i, j$, on peut substituer à chacun, pour ainsi dire, son image $T^q I_{w-2q:i,j}$. Le nombre de ces images sera

$$\sum_{q=-\infty}^{q=0} D(w - 2q : i, j).$$

De plus, chaque image sera du même type $(w : i, j)$.

On démontre facilement qu'il ne peut pas exister entre ces images une relation linéaire; car, dans le cas contraire, en opérant sur l'équation qui les lie ensemble avec une puissance convenable de Θ , on tomberait sur une équation linéaire entre les transbinariants aszygétiques eux-mêmes. Donc, évidemment, le nombre des images ne peut pas excéder la valeur de $(w : i, j)$. Donc

$$\sum_{q=-\infty}^{q=0} D(w - 2q; i, j)$$

n'est ni plus grand ni plus petit que $\sum_{q=-\infty}^{q=0} E(w - 2q; i, j)$; il lui est donc égal, et conséquemment, puisque aucun D ne peut être moins que le E qui lui correspond pour chaque valeur de q ,

$$D(w - 2q; i, j) = E(w - 2q; i, j);$$

car si un D quelconque était plus grand que le E qui lui correspond, un autre D serait nécessairement plus petit, ce qui est inadmissible.

On aura donc $D(w : i, j) = E(w : i, j)$,
 pourvu que $ij - 2w$ ne soit pas négatif.

C. Q. F. D.

On démontre facilement les mêmes théorèmes pour des formes anéantissables par une somme d'opérateurs

$$\begin{aligned} & a_0 \delta_{a_2} + \dots + a_{j-2} \delta_{a_j}, \\ & a'_0 \delta_{a'_2} + \dots + a'_{j'-2} \delta_{a'_j}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

En supposant que chaque j soit pair et en regardant $w : i, j : i', j', \dots$ comme leur type, on parvient à cette conclusion qu'aucun transbinariant d'un tel type n'existe dans le cas où $ij + i'j' + \dots - 2w$ est négatif et que, quand cette quantité n'est pas négative, le nombre des transbinariants asyzygétiques est égal à $(w : i, j : i', j' : \dots) - (w - 2 : i, j : i', j' : \dots)$, où $(w : i, j : i', j' : \dots)$ désigne le nombre de manières de composer w avec i des chiffres 0, 1, 2, ..., combinés avec i' des chiffres 0, 1, 2, ..., j' , etc.

Il est utile de remarquer que les formes et les syzygies fondamentales des intégrales de l'équation

$$(a_0 \delta_{a_2} + a_1 \delta_{a_3} + \dots + a_{\eta-2} \delta_{a_{2\eta}}) I = 0$$

sont des mêmes types que les invariants et les syzygies fondamentales d'un système formé avec deux *quantics* d'ordres η et $\eta - 1$ respectivement; ce qui donne un moyen facile de vérifier la formule que nous avons démontrée pour le nombre de transbinariants asyzygétiques d'un type donné. Il va sans dire que nous n'avons pas négligé de nous servir de cette méthode pour vérifier la justesse de nos conclusions.