136.

SUR LA TRANSFORMATION D'UNE FONCTION QUADRATIQUE EN ELLE-MÊME PAR DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. L. (1855), pp. 288—299.]

Il s'agit de trouver les transformations linéaires d'une fonction quadratique $(\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2$ *en elle-même*, c'est-à-dire de trouver pour $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)$ des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$ telles que

$$(\lozenge)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)^2 = (\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2.$$

En représentant la fonction quadratique par

$$(\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2 = \left|\begin{matrix} a, & h, & g, \ldots \\ h, & b, & f, \ldots \\ g, & f, & c, \ldots \\ \vdots & & \end{matrix}\right|(x, y, z, \ldots)^2,$$

la solution qu'a donnée M. Hermite de ce problème peut être résumée dans la seule équation

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots) =$$

$$\left(\left|\begin{matrix} a, h, g, \ldots \\ h, b, f, \ldots \\ g, f, c, \ldots \\ \vdots \end{matrix}\right|^{-1} \left|\begin{matrix} a, & h-\nu, & g+\mu, \ldots \\ h+\nu, & b, & f-\lambda, \ldots \\ g-\mu, & f+\lambda, & c\ , \ldots \\ \vdots \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a, & h+\nu, & g-\mu, \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda, \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c\ , \ldots \\ \vdots \end{matrix}\right|^{-1} \left|\begin{matrix} a, h, g, \ldots \\ h, b, f, \ldots \\ g, f, c, \ldots \\ \vdots \end{matrix}\right|\right)(x, y, z, \ldots),$$

où $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont des quantités quelconques.

En effet, pour démontrer que cela est une solution, on n'a qu'à reproduire dans un ordre inverse le procédé de M. Hermite. En introduisant les quantités auxiliaires $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, on peut remplacer l'équation par les deux équations

$$\left(\begin{vmatrix} a, & h, & g, \ldots \\ h, & b, & f, \ldots \\ g, & f, & c, \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}\right)(x, y, z, \ldots) = \left(\begin{vmatrix} a, & h+\nu, & g-\mu, \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda, \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c\ , \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}\right)(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

$$\left(\begin{vmatrix} a, & h, & g, \ldots \\ h, & b, & f, \ldots \\ g, & f, & c, \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}\right)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots) = \left(\begin{vmatrix} a, & h-\nu, & g+\mu, \ldots \\ h+\nu, & b, & f-\lambda, \ldots \\ g-\mu, & f+\lambda, & c\ , \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}\right)(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

qui donnent tout de suite d'abord

$$(\lozenge)(x, y, z, \ldots)(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = (\lozenge)(\xi, \eta, \zeta, \ldots)^2,$$

et puis

$$x + \mathrm{x} = 2\xi, \quad y + \mathrm{y} = 2\eta, \quad z + \mathrm{z} = 2\zeta, \quad \&c.$$

On obtient par là :

$$\begin{aligned} (\lozenge)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)^2 &= (\lozenge)(2\xi - \mathrm{x},\ 2\eta - \mathrm{y},\ 2\zeta - \mathrm{z}, \ldots)^2, \\ &= 4(\lozenge)(\xi, \eta, \zeta, \ldots)^2 - 4(\lozenge)(\xi, \eta, \zeta, \ldots)(x, y, z, \ldots) \\ &\quad + (\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation

$$(\lozenge)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)^2 = (\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2,$$

qu'il s'agissait de vérifier.

Je remarque que la transformation est toujours *propre*. En effet, le déterminant de transformation est

$$\begin{vmatrix} a, h, g \ldots \\ h, b, f \ldots \\ g, f, c \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a, & h-\nu, g+\mu \ldots \\ h+\nu, & b, \quad f-\lambda \ldots \\ g-\mu, f+\lambda, & c \quad \ldots \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & h+\nu, g-\mu \ldots \\ h-\nu, & b, \quad f+\lambda \ldots \\ g+\mu, f-\lambda, & c \quad \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a, h, g \ldots \\ h, b, f \ldots \\ g, f, c \ldots \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Or les déterminants qui entrent dans les deux termes moyens, ne contiennent l'un ou l'autre que les puissances *paires* de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Donc ces deux déterminants sont égaux, et les quatre termes du produit sont *réciproques* deux à deux ; le déterminant de transformation est donc $+1$, et la transformation est propre.

Pour obtenir une transformation *impropre*, il faut considérer une fonction quadratique qui contient outre les indéterminées $x, y, z, \ldots$ une indéterminée θ, et puis réduire à zéro les coefficients de tous les termes dans lesquels entre cette indéterminée θ. Les valeurs de x, y, z, ... ne contiendront pas θ, et en représentant par ϑ l'indéterminée que l'on doit ajouter à la suite x, y, z, ..., la valeur de ϑ sera, comme on voit sans peine, $\vartheta = -\theta$; le déterminant de transformation pour la forme aux indéterminées $x, y, z, \ldots, \theta$ sera $+1$, et ce déterminant sera le produit du déterminant de transformation pour la forme aux indéterminées $x, y, z, \ldots$ multiplié par -1. Le déterminant de transformation pour la forme aux indéterminées $x, y, z, \ldots$ sera donc -1, c'est-à-dire, la transformation sera *impropre*.

Au lieu de la formule de transformation ci-dessus, on peut se servir des formules

$$(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \left(\begin{vmatrix} a\ , & h+\nu, & g-\mu, \ldots \\ h-\nu, & b\ , & f+\lambda, \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c\ \ , \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a, & h, & g, \ldots \\ h, & b, & f, \ldots \\ g, & f, & c, \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix} \right)(x, y, z, \ldots),$$

$$\mathrm{x} = 2\xi - x, \quad \mathrm{y} = 2\eta - y, \quad \mathrm{z} = 2\zeta - z, \ldots.$$

Par exemple, en supposant que la forme à transformer soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \&\text{c.},$$

on aura

$$(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \left(\begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu, \ldots \\ -\nu, & b, & \lambda, \ldots \\ \mu, & -\lambda, & c, \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix}^{-1} \right)(ax, by, cz, \ldots),$$

$$\mathrm{x} = 2\xi - x, \quad \mathrm{y} = 2\eta - y, \quad \mathrm{z} = 2\zeta - z, \ \&\text{c.},$$

de manière qu'en posant

$$\begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu, \ldots \\ -\nu, & b, & \lambda, \ldots \\ \mu, & -\lambda, & c, \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix} = k,$$

$$\begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu, \ldots \\ -\nu, & b, & \lambda, \ldots \\ \mu, & -\lambda, & c, \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A\ , & B\ , & C\ , \ldots \\ A', & B', & C', \ldots \\ A'', & B'', & C'', \ldots \\ \vdots & & \end{vmatrix},$$

on aura

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots) = \frac{1}{k} \left| \begin{matrix} 2A - \dfrac{k}{a}, & 2B\ \ , & 2C & \ldots \\ 2A', & 2B' - \dfrac{k}{b}, & 2C' & \ldots \\ 2A''\ \ , & 2B''\ \ , & 2C'' - \dfrac{k}{c} & \ldots \\ \vdots & & & \end{matrix} \right)(ax, by, cz, \ldots),$$

ce qui est l'équation pour la transformation propre en elle-même, de la fonction $ax^2 + by^2 + cz^2 + \&c.$ On en déduira, comme dans le cas général, la formule pour la transformation impropre. On trouvera des observations sur cette formule dans le mémoire "Recherches ultérieures sur les déterminants gauches" [137].

Je reviens à l'équation générale

$$(\lozenge)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)^2 = (\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2,$$

et je suppose seulement que x, y, z, ... soient des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$ qui satisfont à cette équation sans supposer rien davantage par rapport à la forme de la solution. Cela étant, je forme les fonctions linéaires $\mathrm{x} - sx$, $\mathrm{y} - sy$, $\mathrm{z} - sz$, &c., où s est une quantité quelconque, et je considère la fonction

$$(\lozenge)(\mathrm{x} - sx,\quad \mathrm{y} - sy,\quad \mathrm{z} - sz \ldots)^2,$$

laquelle, en la développant, devient

$$(1 + s^2)(\lozenge)(x, y, z \ldots)^2 - 2s(\lozenge)(x, y, z \ldots)(\xi, \eta, \zeta \ldots);$$

et en développant de la même manière la fonction quadratique

$$(\lozenge)\left(\mathrm{x} - \frac{1}{s}x,\ \mathrm{y} - \frac{1}{s}y,\ \mathrm{z} - \frac{1}{s}z, \ldots\right)^2,$$

on obtient l'équation identique

$$(\lozenge)(\mathrm{x} - sx, \mathrm{y} - sy, \mathrm{z} - sz, \ldots)^2 = s^2\ (\lozenge)\left(\mathrm{x} - \frac{1}{s}x,\ \mathrm{y} - \frac{1}{s}y,\ \mathrm{z} - \frac{1}{s}z, \ldots\right)^2.$$

Soit $\square$ le déterminant formé avec les coefficients de fonctions linéaires $\mathrm{x} - sx$, $\mathrm{y} - sy$, $\mathrm{z} - sz$, &c. En supposant que le nombre des indéterminées x, y, z, &c., est n, $\square$ sera évidemment une fonction rationnelle et intégrale du degré n par rapport à s. Soit de même $\square'$ le déterminant formé avec les coefficients de

$$\mathrm{x} - \frac{1}{s}x,\ \mathrm{y} - \frac{1}{s}y,\ \mathrm{z} - \frac{1}{s}z, \text{ \&c.};$$

l'équation qui vient d'être trouvée, donne $\square^2 = s^{2n}\,\square'^2$, c'est-à-dire $\square = \pm s^n\,\square'$. Cela fait voir que les coefficients du premier et du dernier terme, du second et de l'avant-dernier terme, &c., sont égaux, aux signes près. De plus, le coefficient de la plus haute puissance s^n est toujours ± 1, et on voit sans peine qu'en supposant d'abord que n soit *impair*, on a pour la transformation *propre:*

$$\square = (1,\quad P, \ldots P,\quad 1)(-s, 1)^n$$

et pour la transformation *impropre*

$$\square = (1, -P, \ldots P, -1)(-s, 1)^n:$$

équation qui peut être changée en celle-ci: $\square = -(1, P, \ldots P, 1)(s, 1)^n$. Puis, en supposant que n soit *pair*, on a pour la transformation *propre:*

$$\square = (1,\quad P, \ldots P,\quad 1)(-s, 1)^n$$

et pour la transformation *impropre:*

$$\square = (1, -P, \ldots P, -1)(-s, 1)^n,$$

le coefficient moyen étant dans ce cas égal à zéro. Ces théorèmes pour la forme du déterminant des fonctions linéaires $\mathrm{x}-sx$, $\mathrm{y}-sy$, $\mathrm{z}-sz, \ldots$ sont dus à M. Hermite.

Il y a à remarquer que la forme $(\lozenge)(x, y, z \ldots)^2$ est tout à fait indéterminée; c'est-à-dire, on suppose seulement que x, y, z, ... soient des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$, telles qu'il y ait une forme quadratique $(\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2$ pour laquelle l'équation $(\lozenge)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots)^2 = (\lozenge)(x, y, z \ldots)^2$ est satisfaite.

Je regarde d'un autre point de vue ce problème de la transformation en elle-même, d'une fonction quadratique par des substitutions linéaires. Je suppose que x, y, z, &c. soient des fonctions linéaires données de $x, y, z, \ldots$, et je cherche une fonction linéaire de x, y, z, &c. qui, par la substitution de x, y, z, &c. au lieu de x, y, z, &c. se transforme en elle-même à un facteur près. Soit $(l, m, n, \ldots)(x, y, z, \ldots)$, cette fonction linéaire, il faut que $(l, m, n, \ldots)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)$ soit identiquement $= s\,.\,(l, m, n, \ldots)(x, y, z, \ldots)$, ou, ce qui est la même chose, que $(l, m, n, \ldots)(\mathrm{x}-sx, \mathrm{y}-sy, \mathrm{z}-sz, \ldots)$ soit $=0$; c'est-à-dire, les quantités $l, m, n, \ldots$ seront déterminées par autant d'équations linéaires dont les coefficients sont précisément ceux de $\mathrm{x}-sx$, $\mathrm{y}-sy$, $\mathrm{z}-sz$, &c.; donc s sera déterminé si l'on rend égal à zéro le déterminant formé avec ces coefficients, et l, m, n, &c. se trouveront donnés rationnellement en termes de s. Cela étant, je suppose que les racines de l'équation en s soient $a, b, c, \ldots$, et ces différentes racines correspondront aux fonctions linéaires $\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b, \mathrm{x}_c, \ldots$ qui ont la propriété dont il s'agit. Soit $(\lozenge)(x, y, z, \ldots)^2$ une fonction quadratique qui se transforme en elle-même par la substitution de x, y, z, &c. au lieu de x, y, z, &c. Cette fonction peut être exprimée en fonction quadratique de $\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b, \mathrm{x}_c$, &c.; quantités qui, en substituant x, y, z, &c. au lieu de $x, y, z, \ldots$ deviennent $a\mathrm{x}_a, b\mathrm{x}_b, c\mathrm{x}_c, \ldots$.

Je prends les cas d'une fonction *binaire, ternaire,* &c., et d'abord le cas d'une fonction *binaire.*

En écrivant d'abord $(\lozenge)(x, y)^2 = (A, B, C)(\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b)^2$, on doit obtenir identiquement $(A, B, C)\,(a\mathrm{x}_a, b\mathrm{x}_b)^2 = (A, B, C)\,(\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b)^2$, c'est-à-dire $A\,(a^2-1)=0$, $B\,(ab-1)=0$, $C\,(b^2-1)=0$. Or la solution $A=B=C=0$ ne signifiant rien, on ne peut satisfaire à ces équations sans supposer des relations entre les quantités a, b; et pour obtenir une solution dans laquelle la fonction quadratique ne se réduit pas à un carré, il faut supposer, ou $ab-1=0$, ou $a^2-1=0$ et $b^2-1=0$. Le premier cas est celui de la transformation *propre.* Il donne

$$ab=1, \quad (\lozenge)(x, y)^2 = l\,\mathrm{x}_a\mathrm{x}_b.$$

Le second cas est celui de la transformation *impropre.* Il donne

$$a=+1, \quad b=-1, \quad (\lozenge)(x, y)^2 = l\,\mathrm{x}_a{}^2 + m\,\mathrm{x}_b{}^2.$$

En passant au cas d'une fonction *ternaire,* soit

$$(\lozenge)(x, y, z)^2 = (A, B, C, F, G, H)(\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b, \mathrm{x}_c)^2;$$

on doit avoir identiquement

$$(A, B, C, F, G, H)(a\mathrm{x}_a, b\mathrm{x}_b, c\mathrm{x}_c)^2 = (A, B, C, F, G, H)(\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b, \mathrm{x}_c)^2,$$

c'est-à-dire $A(a^2-1)=0$, $B(b^2-1)=0$, $C(c^2-1)=0$, $F(bc-1)=0$, $G(ca-1)=0$, $H(ab-1)=0$, et on voit que pour obtenir une solution dans laquelle la fonction quadratique ne se réduit pas à un carré, ou à une fonction de deux indéterminées, il faut supposer par exemple $a^2-1=0$, $bc-1=0$. On a donc dans le cas d'une fonction ternaire:

$$a^2=1,\quad bc=1,\quad (\lozenge)(x,\ y,\ z)^2=l\,\mathrm{x}_a{}^2+m\,\mathrm{x}_b\mathrm{x}_c.$$

La transformation sera *propre*, ou *impropre*, selon que $a=+1$ ou $a=-1$.

Dans le cas d'une fonction *quaternaire*, on obtient pour la transformation *propre:*

$$ab=cd=1,\quad (\lozenge)(x,\ y,\ z,\ w)^2=l\,\mathrm{x}_a\mathrm{x}_b+m\,\mathrm{x}_c\mathrm{x}_d,$$

et pour la transformation *impropre:*

$$a=+1,\quad b=-1,\quad cd=1,\quad (\lozenge)(x,\ y,\ z,\ w)^2=l\,\mathrm{x}_a{}^2+m\,\mathrm{x}_b{}^2+n\,\mathrm{x}_c\mathrm{x}_d.$$

Dans le cas d'une fonction *quinaire* on obtient

$$a^2=1,\quad bc=de=1,\quad (\lozenge)(x,\ y,\ z,\ w,\ t)^2=l\,\mathrm{x}_a{}^2+m\,\mathrm{x}_b\mathrm{x}_c+n\,\mathrm{x}_d\mathrm{x}_e$$

et la transformation est propre ou impropre, selon que $a=+1$ ou $a=-1$; et ainsi de suite.

Cette méthode a des difficultés dans le cas où l'équation en s a des racines *égales.* Je n'entre pas ici dans ce sujet.

Dans les formules qu'on vient de trouver, on peut considérer les coefficients l, m, &c. comme des quantités *arbitraires.* Mais en supposant que la fonction quadratique soit *donnée*, ces coefficients deviennent *déterminés.* On les trouvera par la formule suivante que je ne m'arrête pas à démontrer.

Soient α, β, γ, &c. les coefficients de la fonction linéaire x_a, α', β', γ', &c. les coefficients de la fonction linéaire x_b, et ainsi de suite; alors, dans les différentes formules qui viennent d'être données, le coefficient d'un terme $\mathrm{x}_a{}^2$ à droite sera

$$\frac{-k}{(\dagger)(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots)^2},$$

et le coefficient d'un terme $\mathrm{x}_a\mathrm{x}_b$ à gauche sera

$$\frac{-k}{(\dagger)(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots)(\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \ldots)},$$

où k dénote le *discriminant* de la fonction quadratique à gauche, et où les coefficients des fonctions quadratiques des dénominateurs sont les coefficients inverses de cette même fonction quadratique à gauche[1].

[1] Je profite de cette occasion pour remarquer concernant ces recherches que les formules données dans la note sur les fonctions du second ordre (t. XXXVIII. [1848] p. 105) [71] pour les cas de trois et de quatre indéterminées, sont exactes, mais que je m'étais trompé dans la forme générale du théorème. [This correction is indicated vol. I. p. 589.]

L'application de la méthode à la forme binaire $(a, b, c)(x, y)^2$ donne lieu aux développements suivants.

J'écris $\mathrm{x} = \alpha x + \beta y$, $\mathrm{y} = \gamma x + \delta y$, et je représente par $(l, m)(x, y)$ une fonction linéaire qui par cette substitution est transformée en *elle-même,* au facteur s près. Nous aurons donc

$$(l, m)(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = s(l, m)(x, y);$$

l'équation pour s sera

$$s^2 - s(\delta + \alpha) + \alpha\delta - \beta\gamma = 0;$$

laquelle peut aussi être écrite comme suit:

$$(1, -\delta - \alpha, \alpha\delta - \beta\gamma)(s, 1)^2 = 0.$$

Soient s', s'' les racines de cette équation. (Il est à peine nécessaire de remarquer que s', s'', et plus bas P, Q, sont ici ce que dans les formules générales j'ai représenté par a, b et x_a, x_b. De même les équations $\rho = s's''$, $\rho = s'^2$, $\rho = s''^2$, obtenues après, correspondent aux équations $ab = 1$, $a^2 = 1$, $b^2 = 1$.) On aura

$$s' + s'' = -\delta - \alpha, \quad s's'' = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

et les coefficients l, m seront déterminés rationnellement par s.

Mais on peut aussi déterminer ces coefficients par l'équation

$$l : m = l\alpha + m\gamma : l\beta + m\delta,$$

qui peut être écrite sous la forme

$$(\beta, \delta - \alpha, -\gamma)(l, m)^2 = 0,$$

et en éliminant entre cette équation et l'équation $lx + my = 0$ les quantités l, m, on voit que les fonctions linéaires $lx + my$ sont les facteurs de la fonction quadratique $(\beta, \delta - \alpha, -\gamma)(y, -x)^2$, ou, ce qui est la même chose, de la fonction quadratique

$$(\gamma, \delta - \alpha, -\beta)(x, y)^2;$$

je représente ces facteurs par P, Q et je remarque encore que l'équation en s aura des racines égales si

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = 0,$$

et que dans ce cas, et *exclusivement* dans ce cas, les fonctions P, Q ne forment qu'une seule et même fonction linéaire.

Je suppose maintenant que la fonction $(a, b, c)(x, y)^2$ se transforme en elle-même par la substitution $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ au lieu de x, y, ou, ce qui est ici plus commode, je suppose que les deux fonctions sont égales à un facteur près, et j'écris

$$(a, b, c)(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^2 = \rho(a, b, c)(x, y)^2.$$

En développant cette équation, on obtient

$$\left.\begin{array}{lll} x^2\,(a,\ b,\ c)(\alpha^2-\rho, & 2\alpha\gamma, & \gamma^2 \quad) \\ +\,2\,xy\,(a,\ b,\ c)(\alpha\beta, & \alpha\delta+\beta\gamma-\rho, & \gamma\delta \quad) \\ +\quad y^2\,(a,\ b,\ c)(\beta^2, & 2\beta\delta, & \delta^2-\rho) \end{array}\right\} = 0.$$

Voilà trois équations linéaires pour déterminer par les quantités α, β, γ, δ, considérées comme données, les coefficients $(a,\ b,\ c)$ de la fonction quadratique. Les coefficients de ces équations linéaires sont

$$\begin{array}{lll} \alpha^2-\rho, & 2\alpha\gamma, & \gamma^2, \\ \alpha\beta, & \alpha\delta+\beta\gamma-\rho, & \gamma\delta, \\ \beta^2, & 2\beta\delta, & \delta^2-\rho. \end{array}$$

Le système inverse par lequel on trouve les valeurs de a, b, c, est

$$\begin{array}{ll} \delta^2\,(\alpha\delta-\beta\gamma)-(\alpha\delta+\beta\gamma+\delta^2)\,\rho+\rho^2, & -\beta\delta\,(\alpha\delta-\beta\gamma)+\alpha\beta\rho, \\ -2\gamma\delta\,(\alpha\delta-\beta\gamma)+2\alpha\gamma\rho, & \alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2-(\delta^2+\alpha^2)\,\rho+\rho^2, \\ \gamma^2\,(\alpha\delta-\beta\gamma)+\gamma^2\rho, & -\alpha\gamma\,(\alpha\delta-\beta\gamma)+\gamma\delta\rho, \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta^2\,(\alpha\delta-\beta\gamma)-\beta^2\rho, \\ -2\alpha\beta\,(\alpha\delta-\beta\gamma)+2\beta\delta\rho, \\ \alpha^2\,(\alpha\delta-\beta\gamma)-(\alpha\delta+\beta\gamma+\alpha^2)\,\rho+\rho^2, \end{array}$$

et le déterminant, égalé à zéro, donne

$$(\alpha\delta-\beta\gamma-\rho)\,\{(\alpha\delta-\beta\gamma+\rho)^2-\rho\,(\alpha+\delta)^2\}=0:$$

équation dont les racines sont

$$\rho=\alpha\delta-\beta\gamma,\quad \rho=\{\tfrac{1}{2}\,(\alpha+\delta)\pm\tfrac{1}{2}\,\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}\}^2.$$

En comparant ces valeurs avec celles de s', s'', on voit que les racines de l'équation en ρ sont

$$\rho=s's'',\quad \rho=s'^2,\quad \rho=s''^2,$$

et nous allons voir que ces valeurs de ρ donnent en général les valeurs PQ, P^2, Q^2, pour la fonction quadratique.

Soit d'abord $\rho=\alpha\delta-\beta\gamma\ (=s's'')$, et posons pour abréger $\alpha\delta-\beta\gamma-\rho=\phi$, le système inverse devient:

$$\begin{array}{lll} (\delta^2-\rho)\,\phi-\beta\rho\,.\,2\gamma, & -\beta\delta\phi-\beta\rho\,(\delta-\alpha), & \beta^2\phi+\beta\rho\,.\,2\beta, \\ -2\gamma\delta\phi-\rho\,(\delta-\alpha)\,2\gamma, & (\alpha\delta+\beta\gamma-\rho)\,\phi-\ \rho\,(\delta-\alpha)^2, & -2\alpha\beta\phi+\rho\,(\delta-\alpha)\,2\beta, \\ -\gamma^2\phi+\gamma\rho\,.\,2\gamma, & -\alpha\gamma\phi+\gamma\rho\,(\delta-\alpha), & (\alpha^2-\rho)\,\phi-\gamma\rho\,.\,2\beta, \end{array}$$

et en mettant $\phi=0$, les termes de chaque ligne (en omettant un facteur) deviennent γ, $\frac{1}{2}\,(\delta-\alpha)$, β. On obtient ainsi dans ce cas, pour la fonction quadratique $(a,\ b,\ c)(x,\ y)^2$ la valeur

$$(\gamma,\ \delta-\alpha,\ -\beta)(x,\ y)^2,$$

qui est en effet le produit PQ des fonctions linéaires.

Il y a à remarquer qu'en supposant $(\delta-\alpha)^2+4\beta\gamma=0$, ce qui est le cas pour lequel ρ sera une racine *triple*, il n'y aura pas de changement à faire dans ce résultat. La fonction quadratique est, comme auparavant, le produit PQ des fonctions linéaires;

seulement ces deux fonctions linéaires dans le cas actuel sont identiques, de manière que la fonction quadratique se réduit à P^2.

Soit ensuite

$$\rho = \{\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}\}^2 \; (= s'^2 \text{ ou } s''^2);$$

en écrivant $\rho = s^2$ et en mettant pour abréger $\alpha\delta - \beta\gamma - s(\delta+\alpha) + s^2 = \chi$, le système inverse devient

$$\begin{array}{lll}
(\delta^2+s^2)\chi + s(\delta-s)^2(\delta+\alpha), & -\beta\delta\chi - \beta s(\delta-s)(\delta+\alpha), & \beta^2\chi+\beta^2 s(\delta+\alpha), \\
-2\gamma\delta\chi - 2\gamma s(\delta-s)(\delta+\alpha), & \{s^2+s(\delta+\alpha)+\alpha\delta+\beta\gamma\}\chi + 2\beta\gamma s(\delta+\alpha), & -2\alpha\beta\chi - 2\beta s(\alpha-s)(\delta+\alpha), \\
\gamma^2\chi+\gamma^2 s(\delta+\alpha), & -\alpha\gamma\chi - \gamma s(\alpha-s)(\delta+\alpha), & (\alpha^2+s^2)\chi + s(\alpha-s)^2(\delta+\alpha).
\end{array}$$

Donc, en écrivant $\chi = 0$ et en omettant le facteur $s(\delta+\alpha)$, le système inverse devient

$$\begin{array}{lll}
(\delta-s)^2, & -\beta(\delta-s), & \beta^2, \\
\gamma(\delta-s), & \beta\gamma, & -\beta(\alpha-s), \\
\gamma^2, & -\gamma(\beta-s), & (\alpha-s)^2,
\end{array}$$

et les quantités dans chaque ligne sont dans le rapport $l^2 : lm : m^2$, de manière que la fonction quadratique est dans ce cas égale à P^2 ou Q^2. Cela suppose que $\delta+\alpha$ ne soit égal à zéro. En faisant pour le moment $\rho = 1$, on en tire la conclusion qu'à moins de supposer $\delta+\alpha = 0$, il n'existe pas de fonction quadratique binaire proprement dite (fonction non carrée) qui par la substitution *impropre* $\alpha x+\beta y$, $\gamma x+\delta y$ pour x, y, se transforme en elle-même. L'équation $\delta+\alpha = 0$ donne $\rho = \alpha\delta - \beta\gamma$, qui est une racine double de l'équation cubique. On remarquera en passant par rapport à la signification de l'équation $\delta+\alpha = 0$, que l'on a en général:

$$\begin{aligned}
(\alpha,\ \beta)(\alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y) &: (\gamma,\ \delta)(\alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y) \\
= (\alpha^2+\beta\gamma)x + \beta(\delta+\alpha)y &: \gamma(\delta+\alpha)x + (\delta^2+\beta\gamma)y,
\end{aligned}$$

et de là, qu'en supposant $\delta+\alpha = 0$, on a

$$(\alpha,\ \beta)(\alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y) : (\gamma,\ \delta)(\alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y) = x,\ y.$$

Cela revient à dire qu'en faisant deux fois la substitution $\alpha x+\beta y$, $\gamma x+\delta y$ au lieu de x, y, on retrouve les quantités x, y, ou que la substitution est *périodique* du second ordre. Il y a aussi à remarquer que dans le cas dont il s'agit, savoir pour $\delta+\alpha = 0$, on a $s'' = -s'$, et que les deux fonctions linéaires P, Q restent parfaitement déterminées.

Nous venons de voir qu'il n'existe pas de transformation impropre d'une fonction quadratique binaire proprement dite, à moins que $\delta+\alpha$ ne soit pas $= 0$. Mais en supposant $\delta+\alpha = 0$, on voit que les coefficients des équations pour a, b, c deviennent

$$\begin{array}{lll}
-\beta\gamma, & -\gamma(\delta-\alpha), & \gamma^2, \\
\alpha\beta, & \alpha(\delta-\alpha), & -\alpha\gamma, \\
\beta^2, & \beta(\delta-\alpha), & \beta\gamma,
\end{array}$$

c'est-à-dire: les coefficients de chaque équation sont dans le rapport de

$$\beta, \quad \delta - \alpha, \quad -\gamma,$$

de manière qu'en supposant que les coefficients a, b, c satisfont à la seule équation

$$(a, b, c)(\beta, \delta - \alpha, -\gamma) = 0,$$

où α, β, γ, δ sont des quantités quelconques, telles que $\delta + \alpha = 0$, on aura

$$(a, b, c)(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^2 = -(\alpha\delta - \beta\gamma)(a, b, c)(x, y)^2.$$

Ce n'est là qu'un cas particulier de l'équation identique

$$(a, b, c)(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma) . (a, b, c)(x, y)^2 =$$

$$(\delta + \alpha) . (a\alpha + b\gamma, b(\delta + \alpha), b\beta + c\delta)(x, y)^2 + (\beta, \delta - \alpha, -\gamma)(a, b, c) . (\beta, \delta - \alpha, -\gamma)(y, -x)^2.$$

Il faut remarquer qu'en supposant toujours l'équation

$$(a, b, c)(\beta, \delta - \alpha, -\gamma) = 0,$$

la fonction quadratique $(a, b, c)(x, y)^2$, *en supposant qu'elle se réduise à un carré*, est comme auparavant P^2 ou Q^2, c'est-à-dire le carré de l'une des fonctions linéaires. En effet: en écrivant $(a, b, c)(x, y)^2 = (lx + my)^2$, l'équation entre l, m serait évidemment $(\beta, \delta - \alpha, -\gamma)(l, m)^2 = 0$, de manière que l, m auraient les mêmes valeurs qu'auparavant. J'ajoute que tout ce qui précède par rapport à l'équation

$$(a, b, c)(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^2 = \rho\,(a, b, c)(x, y)^2$$

fait voir qu'à moins que la fonction quadratique ne soit un carré, on aura toujours $\rho = \pm(\alpha\delta - \beta\gamma)$; ce qu'on savait déjà dès le commencement, et ce qui peut être démontré comme à l'ordinaire, en égalant les discriminants $(ac - b^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ et $(ac - b^2)\rho^2$ des deux côtés. Je fais enfin $\rho = 1$, ce qui donne l'équation

$$(a, b, c)(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^2 = (a, b, c)(x, y)^2,$$

et (en faisant abstraction du cas où la fonction quadratique est un carré) je tire de ce qui précède les résultats connus, savoir, que l'on a:

1. Pour la transformation propre:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$
$$a : 2b : c = \gamma : \delta - \alpha : -\beta.$$

2. Pour la transformation impropre:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1, \quad \delta + \alpha = 0,$$
$$a\beta + b(\delta - \alpha) - c\gamma = 0.$$

Je crois que cette discussion a été utile pour compléter la théorie algébrique de la forme binaire $(a, b, c)(x, y)^2$.