134.

REMARQUES SUR LA NOTATION DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. L. (1855), pp. 282—285.]

Je me sers de la notation

$$\left|\begin{matrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{matrix}\right|$$

pour représenter ce que j'appelle une *matrice;* savoir un *système* de quantités rangées en forme de *carré,* mais d'ailleurs tout à fait *indépendantes* (je ne parle pas ici des *matrices rectangulaires*). Cette notation me parait très commode pour la théorie des équations *linéaires;* j'écris par exemple

$$(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \left(\left|\begin{matrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \ldots \\ \vdots & & \end{matrix}\right|\right)(x, y, z, \ldots)$$

pour représenter le système des équations

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z \ldots, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \ldots, \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \ldots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

On obtient par là l'équation:

$$(x, y, z, \ldots) = \left(\left| \begin{array}{llll} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right|^{-1} \right)(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

qui représente le système d'équations qui donne x, y, z,... en termes de ξ, η, ζ, ..., et on se trouve ainsi conduit à la notation

$$\left| \begin{array}{llll} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right|^{-1}$$

de la matrice *inverse.* Les termes de cette matrice sont des fractions, ayant pour *dénominateur* commun le *déterminant* formé avec les termes de la matrice originale; les *numérateurs* sont les déterminants mineurs formés avec les termes de cette même matrice en supprimant l'une quelconque des lignes et l'une quelconque des colonnes.

Soit encore

$$(x, y, z, \ldots) = \left(\left| \begin{array}{llll} a\,, & b\,, & c\,, & \ldots \\ a', & b', & c', & \ldots \\ a'', & b'', & c'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right| \right)(x, y, z, \ldots),$$

on peut écrire:

$$(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \left(\left| \begin{array}{llll} \alpha, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{llll} a\,, & b\,, & c\,, & \ldots \\ a', & b', & c', & \ldots \\ a'', & b'', & c'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right| \right)(x, y, z, \ldots),$$

et l'on parvient ainsi à l'idée d'une *matrice composée,* par ex.

$$\left| \begin{array}{llll} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right| \begin{array}{llll} a\,, & b\,, & c\,, & \ldots \\ a', & b', & c', & \ldots \\ a'', & b'', & c'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array} \right| .$$

On voit d'abord que la valeur de cette matrice composée est

$$\left| \begin{array}{lll} (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)(a, a', a'', \ldots), & (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)(b, b', b'', \ldots), & \ldots \\ (\alpha', \beta', \gamma', \ldots)(a, a', a'', \ldots), & (\alpha', \beta', \gamma', \ldots)(b, b', b'', \ldots), & \ldots \\ \vdots & & \end{array} \right|$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)(a, a', a'', \ldots) = \alpha a + \beta a' + \gamma a'' + \ldots$. Il faut faire attention, dans la composition des matrices, de combiner les *lignes* de la matrice à gauche avec les *colonnes* de la matrice à droite, pour former les *lignes* de la matrice composée. Il y aurait bien des choses à dire sur cette théorie de matrices, laquelle doit, il me semble, précéder la théorie de *Déterminants*.

Une notation semblable peut être employée dans la théorie des fonctions *quadratiques*. En effet, on peut dénoter par

$$\left(\begin{array}{|cccc|} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \vdots & & & \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta)(x, y, z)$$

la fonction *lineo-linéaire*

$$\begin{aligned} &(\alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta \ldots)\,x \\ +&(\alpha'\,\xi + \beta'\,\eta + \gamma'\,\zeta \ldots)\,y \\ +&(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta \ldots)\,z \end{aligned}$$

et de là par

$$\left(\begin{array}{|cccc|} a, & h, & g, & \ldots \\ h, & b, & f, & \ldots \\ g, & f, & c, & \ldots \\ \vdots & & & \end{array}\right)(x, y, z, \ldots)^2$$

la fonction *quadratique*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \ldots$$

que je représente aussi par

$$(a, b, c, \ldots f, g, h, \ldots)(x, y, z, \ldots)^2.$$

Je remarque qu'en général je représente une fonction rationnelle et intégrale, homogène et des *degrés* m, m', &c., par rapport aux indéterminées x, y, &c., x', y', &c., de la manière suivante:

$$(\ \Diamond\ )(x, y, \ldots)^m(x', y', \ldots)^{m'} \ldots.$$

Une fonction rationnelle et intégrale, homogène et du degré m par rapport aux deux indéterminées x, y sera donc représentée par

$$(\ \Diamond\ )(x, y)^m.$$

En introduisant dans cette notation les *coefficients*, j'écris par exemple

$$(a, b, c, d \between x, y)^3,$$

pour représenter la fonction

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

tandis que je me sers de la notation

$$(a, b, c, d \between x, y)^3,$$

pour représenter la fonction

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

et de même pour les fonctions d'un degré quelconque. J'ai trouvé cette distinction très commode.

[In the foregoing Paper as here printed, except in the expression in the second line of this page,)(is used instead of)(: it appears by a remark (*Crelle*, t. LI, errata) that the manuscript had the interlaced parentheses $\between$. Moreover in the manuscript ( ) was used for a Matrix, which was thus distinguished from a Determinant, but in the absence of any real ambiguity, no alteration has been made in this respect. In the reprint of subsequent papers from Crelle, the arrowhead)(or $\between$ is used instead of ( ).]