

133.

SUR UN THÉORÈME DE M. SCHLÄFLI.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. L. (1855), pp. 278—282.]

ON lit dans (§ 13) d'un mémoire très intéressant de M. Schläfli intitulé "Über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen" (*Mém. de l'Acad. de Vienne*, t. IV. [1852]) un très beau théorème sur les *Résultants*.

Pour faire voir plus clairement en quoi consiste ce théorème, je prends un cas particulier. Soit

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d)(x, y)^3,$$

$$V = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = (\alpha, \beta, \gamma)(x, y)^2.$$

Je fais $p = x^2$, $q = xy$, $r = y^2$, et je forme les opérateurs

$$\mathfrak{A} = \xi \partial_a + \frac{1}{3} \eta \partial_b + \frac{1}{3} \zeta \partial_c,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{3} \xi \partial_b + \frac{1}{3} \eta \partial_c + \zeta \partial_d,$$

lesquels, opérant sur U , donnent

$$x(p\xi + q\eta + r\zeta); \quad y(p\xi + q\eta + r\zeta).$$

L'opérateur

$$\mathfrak{C} = \xi \partial_a + \frac{1}{2} \eta \partial_b + \zeta \partial_c,$$

opérant sur V , donne

$$p\xi + q\eta + r\zeta.$$

Cela étant, soit $\phi = 0$ le *résultant* des équations $U = 0, V = 0$, c'est-à-dire l'équation que l'on obtient en éliminant x, y entre les équations $U = 0, V = 0$, ou autrement dit, soit ϕ le résultant des fonctions U, V . Pour fixer les idées j'écris la valeur de ce résultant comme suit :

$$\phi = \begin{vmatrix} a, & 3b, & 3c, & d \\ a, & 3b, & 3c, & d \\ & & a, & 2\beta, & \gamma \\ & & a, & 2\beta, & \gamma \\ a, & 2\beta, & \gamma & & \end{vmatrix} .$$

Je suppose que les opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ opèrent sur le résultant ϕ , ce qui donne les fonctions

$$\mathfrak{A}\phi, \mathfrak{B}\phi, \mathfrak{C}\phi,$$

ou en écrivant pour $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ leurs valeurs :

$$\begin{aligned} & (\xi\partial_a + \frac{1}{3}\eta\partial_b + \frac{1}{3}\zeta\partial_c)\phi, \\ & (\frac{1}{3}\xi\partial_b + \frac{1}{3}\eta\partial_c + \zeta\partial_a)\phi, \\ & (\xi\partial_a + \frac{1}{2}\eta\partial_\beta + \zeta\partial_\gamma)\phi, \end{aligned}$$

et en considérant ces expressions comme des fonctions de ξ, η, ζ , j'en forme le résultant Φ , savoir

$$\Phi = \begin{vmatrix} \partial_a\phi, & \frac{1}{3}\partial_b\phi, & \frac{1}{3}\partial_c\phi \\ \frac{1}{3}\partial_b\phi, & \frac{1}{3}\partial_c\phi, & \partial_a\phi \\ \partial_a\phi, & \frac{1}{2}\partial_\beta\phi, & \partial_\gamma\phi \end{vmatrix} .$$

Ce résultant Φ contiendra le carré de ϕ *comme facteur*; c'est ce qui donne, dans le cas particulier dont il s'agit, le théorème de M. Schläfli.

Généralement, en supposant que l'on ait autant de fonctions U, V, W, \dots que d'indéterminées x, y, z, \dots , on peut supposer que p, q, \dots soient des monômes $x^l y^m z^n, \dots$ du même degré λ (il n'est pas nécessaire d'avoir la série entière de ces monômes), et on peut former des opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \&c.$ en même nombre que celui des monômes p, q, \dots avec les indéterminées ξ, η, \dots , tels que ces opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$, opérant sur les fonctions U, V, W, \dots (chacun sur la fonction à laquelle il appartient), donnent $t(p\xi + q\eta \dots)^\mu, t'(p\xi + q\eta \dots)^\mu, \&c.; t, t', \&c.$ étant des monômes de la forme $x^f y^g z^h \dots$

Cela étant, soit ϕ le résultant des fonctions U, V, W, \dots ; en opérant sur ce résultant ϕ avec les opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ et en formant ainsi les fonctions $\mathfrak{A}\phi, \mathfrak{B}\phi, \dots$, soit Φ le résultant de ces expressions considérées comme des fonctions de $\xi, \eta, \&c.$ Φ contiendra une puissance de ϕ *comme facteur*, et en supposant que μ ne soit plus petit qu'aucun autre des indices μ, μ', \dots ; $\pi = \mu\mu' \dots$; et $\sigma = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} + \dots$, l'indice de cette puissance sera au moins $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$. Voilà le théorème général de M. Schläfli.

La démonstration donnée dans le mémoire cité est, on ne peut plus, simple et élégante. Elle repose d'abord sur un théorème connu (démontré au reste § 6) qui peut être énoncé ainsi; savoir, en supposant que les équations $U=0$, $V=0$, ... soient satisfaites, on aura (près un facteur indépendant de ξ , η , ...):

$$\mathfrak{A}\phi = t(p\xi + q\eta \dots)^\mu, \quad \mathfrak{B}\phi = t'(p\xi + q\eta \dots)^{\mu'}, \quad \&c.$$

Puis, elle est fondée sur le théorème démontré (§ 12), savoir: le résultant des fonctions

$$t(p\xi + q\eta \dots)^\mu + f(\xi, \eta \dots),$$

$$t'(p\xi + q\eta \dots)^{\mu'} + f'(\xi, \eta \dots),$$

⋮

(où f , f' , ... sont des polynômes de degrés μ , μ' , ... en ξ , η , &c., et p , q , ..., t , t' , ... des constantes quelconques) sera, en supposant que μ ne soit plus petit qu'aucun autre des indices μ , μ' , ..., et en posant $\pi = \mu\mu' \dots$, tout au plus du degré $\frac{\pi}{\mu}$ par rapport aux quantités t , t' , &c. Voici cette démonstration, qui suppose aussi que le résultant ϕ soit *indécomposable*. Supposons que les coefficients de U , V , W , ... soient assujettis à la seule condition d'être tels que le résultant ϕ soit un infiniment petit du premier ordre, il sera permis de supposer que tous ces coefficients des indéterminées x , y , ... ne diffèrent des valeurs qui satisfont aux équations $U=0$, $V=0$, $W=0$, ... que par des incréments infiniment petits du premier ordre; le résultant ϕ sera un infiniment petit du premier ordre, mais toute autre fonction des coefficients, à moins qu'elle ne contienne une puissance de ϕ comme facteur, aura une valeur finie, et toute fonction des coefficients infiniment petite de l'ordre k contiendra ϕ^k comme facteur. Dans cette supposition les équations $\mathfrak{A}\phi = 0$, $\mathfrak{B}\phi = 0$, &c. deviendront:

$$t(p\xi + q\eta \dots)^\mu + f(\xi, \eta \dots) = 0,$$

$$t'(p\xi + q\eta \dots)^{\mu'} + f'(\xi, \eta \dots) = 0,$$

⋮

où f , f' , ... sont des polynômes de degrés μ , μ' , ... dont les coefficients sont des infiniment petits du premier ordre. En supposant toujours que μ ne soit plus petit qu'aucun autre des indices μ , μ' , ... et en posant $\pi = \mu\mu' \dots$, $\sigma = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} \dots$, le résultant Φ

du système sera tout au plus du degré $\frac{\pi}{\mu}$ par rapport aux quantités finies t , t' , ... Le degré par rapport à tous les coefficients est σ ; le degré par rapport aux coefficients de f , f' , ... sera donc au moins $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$; c'est-à-dire, ce résultant sera un infiniment

petit de l'ordre $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$, ou enfin, Φ contiendra $\phi^{\sigma - \frac{\pi}{\mu}}$ comme facteur. Or les coefficients de U , V , W , ... (assujettis à la seule condition ci-dessus mentionnée) étant d'ailleurs arbitraires, on voit sans peine qu'il est permis de faire abstraction de la condition, et que Φ contiendra en général cette même puissance $\phi^{\sigma - \frac{\pi}{\mu}}$ comme facteur; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Rien n'empêche que Φ ne contienne une plus haute puissance que $\phi^{\sigma-\pi:\mu}$ comme facteur, ou que Φ ne s'évanouisse identiquement. On peut même assigner de plus près que l'a fait M. Schläfli, des cas où Φ s'évanouit identiquement. Soient m, m', m'', \dots les degrés de U, V, W, \dots par rapport à x, y, z, \dots , $p = mm'm'' \dots$, $s = \frac{p}{m} + \frac{p}{m'} + \frac{p}{m''} \dots$, ϕ sera du degré $\frac{p}{m}$ par rapport aux coefficients de U . Soient aussi μ_i, μ_{ii}, \dots les degrés de celles des fonctions $\mathfrak{A}\phi, \mathfrak{B}\phi, \dots$, pour lesquelles les opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ contiennent des différentielles par rapport aux coefficients de U , $\rho = \frac{\pi}{\mu_i} + \frac{\pi}{\mu_{ii}} \dots$: pour ces fonctions les coefficients seront du degré $\frac{p}{m} - 1$ par rapport aux coefficients de U ; pour les autres ils seront du degré $\frac{p}{m}$. Φ sera donc du degré $\left(\frac{p}{m} - 1\right)\rho + \frac{p}{m}(\sigma - \rho) = \frac{p}{m}\sigma - \rho$, par rapport aux coefficients de U , et $\Phi \div \phi^{\sigma-\pi:\mu}$ sera du degré $\frac{p}{m}\sigma - \rho - \frac{p}{m}\left(\sigma - \frac{\pi}{\mu}\right)$, c'est-à-dire du degré $\frac{p}{m} \cdot \frac{\pi}{\mu} - \rho$ par rapport aux coefficients de U . De même, en supposant que les lettres m', ρ', \dots aient rapport à V , &c., $\Phi \div \phi^{\sigma-\pi:\mu}$ sera du degré $\frac{p}{m'} \cdot \frac{\pi}{\mu} - \rho'$, &c. par rapport aux coefficients de V , &c. Si l'un quelconque des nombres $\frac{p}{m} \cdot \frac{\pi}{\mu} - \rho$, $\frac{p}{m'} \cdot \frac{\pi}{\mu} - \rho'$, &c. est *négatif*, et à plus forte raison, si leur somme $s \cdot \frac{\pi}{\mu} - \sigma$ est *negative*, Φ doit s'évanouir identiquement. En particulier, en supposant que le nombre des fonctions $\mathfrak{A}\phi, \mathfrak{B}\phi, \dots$ (c'est-à-dire le nombre des indéterminés ξ, η, \dots) soit ν , on aura $\sigma > \nu \frac{\pi}{\mu}$, et par cette raison Φ s'évanouira identiquement si $\frac{\pi}{\mu}(\sigma - \nu)$ est négatif, c'est-à-dire si $\nu > \sigma$. Je ne parlerai pas ici des cas examinés par M. Schläfli, où Φ contient comme facteur une plus haute puissance que $\phi^{\sigma-\pi:\mu}$.