

132.

RÉPONSE À UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. STEINER
(Aufgabe 4, Crelle t. xxxi. (1846) p. 90).

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. L. (1855), pp. 277—278.]

EN partant des deux théorèmes :

I. Qu'il existe au moins une surface du second ordre qui touche neuf plans donnés quelconques ;

II. Que le lieu d'intersection de trois plans rectangles qui touchent une surface du second ordre est une sphère concentrique avec la surface, tandis que pour le paraboloïde cette sphère se réduit à un plan,

M. Steiner suppose le cas d'un parallélepipède rectangle, ou même d'un cube P et d'un point quelconque D , par lequel passent trois plans rectangles. Les six plans du parallélepipède P et les trois plans qui passent par le point D seront touchés d'une surface F du second ordre (I.), et les huit angles E du parallélepipède P et le point D doivent donc se trouver tous les neuf sur la surface d'une sphère, ou dans un plan (II.). Les huit angles E sont en effet situés sur la surface d'une sphère, déterminée par eux ; mais le point D étant arbitraire, ce point en général ne sera pas situé sur cette surface sphérique, de manière que les neuf points $8E$ et D ne seront situés, ni dans une surface sphérique, ni dans un plan ; ce qui ne s'accorde pas avec le théorème II. Cela étant, M. Steiner dit, qu'il y a à prouver que la contradiction n'est qu'apparente, et que tout cela n'affaiblit pas la validité générale des deux théorèmes.

Il s'agit de savoir ce que devient dans le cas supposé par M. Steiner la surface du second ordre qui touche les six plans du parallélepipède P et les trois plans qui

passent par le point *D*. Cette surface sera en effet la conique selon laquelle l'infini, considéré comme plan, est coupé par un cône déterminé, près la position du sommet. En effet, menons par un point quelconque de l'espace trois plans parallèles aux plans du parallélepède *P*, et par le point *D* trois autres plans parallèles à ces plans. Ces six plans seront touchés (en vertu d'un théorème connu) par un cône déterminé du second ordre, et on peut dire que ce cône, quelle que soit la position de son sommet, rencontre l'infini, considéré comme plan, dans une seule et même conique (cela n'est en effet autre chose que de dire que deux droites parallèles rencontrent l'infini, considéré comme plan, dans un seul et même point). Le cône dont il s'agit aura la propriété d'être touché par une infinité de systèmes de trois plans rectangles. En effet: le plan passant par le sommet, et perpendiculaire à la droite d'intersection de deux plans tangents quelconques sera un plan tangent du cône; les plans d'un tel système seront aussi des plans tangents de la conique mentionnée ci-dessus: donc le sommet du cône sera le point d'intersection de trois plans rectangles de la conique; et ce sommet étant un point entièrement indéterminé, le lieu de l'intersection des trois plans tangents rectangles de la conique, sera de même absolument indéterminé, ou si l'on veut, ce lieu sera l'espace entier près les points à une distance infinie. La contradiction apparente dont M. Steiner parle, a par conséquent son origine dans l'indétermination qui a lieu dans le cas dont il s'agit. Dans tout autre cas, le point d'intersection des trois plans rectangles de la surface du second ordre est parfaitement déterminé, et les théorèmes I. et II. sont tous deux légitimes.

En partant des deux théorèmes :
 I. Qu'il existe au moins une surface du second ordre qui touche neuf plans données quelconques;
 II. Que le lieu d'intersection de trois plans rectangles qui touchent une surface du second ordre est une sphère concentrique avec la surface, tandis que pour le cas où cette sphère se réduit à un plan.
 M. Steiner suppose le cas d'un parallélepède rectangle, ou même d'un cube *P* et d'un point quelconque *D*, par lequel passent trois plans rectangles des six plans du parallélepède *P*, et les trois plans qui passent par le point *D* seront touchés d'une surface *S* du second ordre (*I.*), et les huit angles *A* de ce parallélepède *P* et le point *D* lui-même se trouvent tous les neuf sur la surface d'une sphère, ou dans un plan (*II.*). Les huit angles *A* sont en effet situés sur la surface d'une sphère déterminée par eux; mais le point *D* étant arbitraire, ce point en général ne sera pas situé sur cette surface sphérique de manière que les neuf points *A* et *D* ne soient situés ni dans une surface sphérique, ni dans un plan; ce qui ne s'accorde pas avec le théorème II. C'est dans M. Steiner dit qu'il y a à prouver que la contradiction n'est qu'apparente et que tout cela n'est établi par la validité générale des deux théorèmes.
 Il s'agit de savoir ce que devient dans le cas supposé par M. Steiner la surface du second ordre qui touche les six plans du parallélepède *P* et les trois plans qui