29.

SUR LA RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION LINÉAIRE EN MATRICES D'UN ORDRE QUELCONQUE.

[*Comptes Rendus*, XCIX. (1884), pp. 409—412, 432—436.]

CE qui intéresse le plus dans les résultats nouvellement acquis que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, c'est l'union ou bien l'anastomose dont ils offrent un exemple frappant et tout à fait inattendu entre les deux grandes théories de l'*Algèbre moderne* et de l'*Algèbre nouvelle*, dont l'une s'occupe des transformations linéaires, et l'autre de la quantité généralisée, de sorte qu'au même titre que Newton définit l'Algèbre ordinaire comme étant l'Arithmétique universelle, on pourrait très bien caractériser cette Algèbre-ci comme étant l'Algèbre universelle, ou au moins une de ses branches les plus importantes.

En général, un invariant de deux formes signifie une fonction de deux systèmes de coefficients qui reste invariable, à un facteur près, quand les deux systèmes des variables sont ou identiques ou assujettis à des substitutions semblables; mais rien n'empêche qu'on n'applique ce même mot au cas où les substitutions sont réciproques: ainsi, sans parler du cas de deux formes mixtes, on aura des invariants de deux formes données à mouvement semblable et des invariants à mouvement contraire; on peut très bien nommer ces derniers (comme titre distinctif) *contrariants*. C'est à une classe spéciale de contrariants que nous aurons affaire dans la solution de l'équation générale linéaire en matrices d'un ordre quelconque.

En supposant que chaque p et p' soit une matrice de l'ordre ω, l'opérateur qui contient i couples

$$p_1(\ )p'_1+p_2(\ )p'_2+\ldots+p_i(\ )p'_i$$

peut être nommé provisoirement un *nivellateur* de l'ordre ω et de l'étendue i, et on peut le caractériser par le symbole $\Omega_{\omega,i}$. Servons-nous toujours du symbole 0 pour signifier une matrice dont tous les éléments sont des zéros, et désignons par 1 (ou bien par υ indifféremment) une matrice dont tous les éléments sont zéro, à l'exception des éléments de la diagonale qui seront des unités: ce sont les matrices nommées *matrice nulle* et *matrice unitaire* respectivement.

J'ai déjà expliqué comment un nivellateur général, de l'ordre ω, donne naissance à une matrice de l'ordre ω^2: je nomme le déterminant de cette matrice le *déterminant du nivellateur**. Ces déterminants possèdent des propriétés tout à fait analogues à celles des déterminants des matrices simples; ainsi, par exemple, je démontre la propriété dont je me suis servi avec grand avantage dans les recherches actuelles, que le déterminant du produit de deux *nivellateurs* est égal au produit de leurs déterminants séparés, et que le déterminant d'une fonction rationnelle d'un nivellateur, disons $F\Omega$, est égal au résultant (par rapport à Ω regardé comme une quantité ordinaire) de $F\Omega$ et $I\Omega$, où $I\Omega = 0$ représente l'équation identique du degré ω^2 à laquelle Ω est assujetti.

En général, à un système ou *corps* de matrices $p_1, p_2, \ldots, p_i$ de l'ordre ω correspond un quantic de l'ordre ω, c'est-a-dire le déterminant de

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i.$$

Je nomme les coefficients de ce quantic les *paramètres du corps.* Ces paramètres doivent être regardés comme des quantités connues. Ainsi, par exemple, si au *corps* p, q (deux matrices binaires) on adjoint la matrice unitaire v, et qu'on forme le déterminant de la matrice $x + yp + zq$, on obtiendra un quantic

$$x^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2,$$

où, si l'on regarde p, q comme des *quaternions*, on aura, dans le langage du grand Hamilton,

$$B = Sp, \quad C = Sq, \quad D = T^2 p, \quad F = T^2 q, \quad E = S(Vp \,.\, Vq).$$

Il résulte de cette définition qu'à chaque nivellateur $\Omega_{\omega, i}$ appartiennent deux quantics de l'ordre ω et avec i variables, dont l'un appartient au corps $p_1, p_2, \ldots, p_i$ et l'autre au corps $p'_1, p'_2, \ldots, p'_i$.

Si l'on connaît l'équation identique $I\Omega = 0$ à laquelle le nivellateur Ω obéit, on peut immédiatement, comme je l'ai déjà montré, résoudre l'équation $\Omega x = T$.

Mais il est très facile de voir que $I\Omega$ n'est autre chose que le déterminant du nivellateur $\Omega - \lambda v\,(\ )\,v$, quand dans ce résultat on substitue Ω à λ. Donc la question de la solution linéaire la plus générale est ramenée à ce seul problème:

Exprimer le déterminant d'un nivellateur en termes de quantités connues.

Or la première conclusion et la plus difficile à établir dans cette recherche, mais que j'ai enfin réussi à démontrer, c'est que ce déterminant est toujours

* Quelquefois ce déterminant sera nommé un *nivellant.*

une *fonction* entière, mais pas nécessairement rationnelle, des *coefficients des deux quantics* qui sont associés au nivellateur.

Cela étant convenu, on démontre avec une extrême facilité que ce déterminant est un *contrariant* du degré ω dans chaque système de coefficients des deux quantics associés.

Cela ne suffit pas ou peut ne pas suffire en soi-même à définir complètement le contrariant cherché; nommons, en général, ce contrariant le *nivellant* des deux quantics.

Supposons que $N_{x, y, \ldots z, t}$ soit le nivellant pour deux quantics d'un ordre donné ω, et représentons par $N_{x, y, \ldots z, 0}$ ce que ce nivellant devient quand on réduit à zéro tous les coefficients qui appartiennent aux termes dans les deux quantics qui contiennent t; alors il est facile de voir que

$$N_{x, y, \ldots, z, 0} = N_{x, y, \ldots z}.$$

Cette propriété seule est suffisante (avec l'aide d'un quelconque des opérateurs différentiels qui servent pour annuler un contrariant) pour préciser le contrariant (nivellant) dans le cas de deux quantics du second ordre, et c'est ainsi que j'ai obtenu la solution de l'équation linéaire pour le cas des matrices binaires donné dans la Note précédente. Or il est bien concevable que cette loi ne peut pas suffire à déterminer les paramètres arbitraires qui entrent dans le contrariant d'ordre (ω, ω) appartenant à deux quantics de l'ordre ω.

Mais il y a encore une autre loi (constituant par elle-même un très beau théorème) qui doit suffire surabondamment à cette fin.

C'est une loi qui établit une liaison entre les nivellants de deux systèmes de quantics contenant chacun le même nombre de variables, mais dont l'un est d'un ordre plus grand par unité que l'ordre de l'autre.

Supposons que N soit le nivellant de deux quantics de l'ordre ω,

$$F(x, y, \ldots, z) \text{ et } G(x, y, \ldots, z);$$

soit N' ce que devient N quand

$$F(x, y, \ldots, z) = (lx + my + \ldots + nz) F_1(x, y, \ldots, z)$$

et
$$G(x, y, \ldots, z) = (\lambda x + \mu y + \ldots + \nu z) G_1(x, y, \ldots, z);$$

alors je dis que, quand

$$l\lambda + m\mu + \ldots + n\nu = 0,$$

le nivellant de (F_1, G_1) sera contenu comme facteur dans le nivellant modifié N'.

A l'aide de ces principes, je me propose de calculer les nivellants pour les degrés supérieurs au second. On voit par ce qui précède que la solution de l'équation linéaire $\Sigma pxp' = T$ sera alors connue en termes des p, des p', de T et des paramètres des deux corps $p_1, p_2, \ldots, p_i, p'_1, p'_2, \ldots, p'_i$, augmentés l'un et l'autre d'une matrice unitaire.

C'est dans les *Lectures*, publiées en 1844, que pour la premiére fois a paru la belle conception de l'équation identique appliquée aux matrices du troisième ordre, enveloppée dans un langage propre à Hamilton, après lui mise à nu par M. Cayley dans un très important Mémoire sur les matrices dans les *Philosophical Transactions* pour 1857 ou 1858, et étendue par lui aux matrices d'un ordre quelconque, mais sans démonstration; cette démonstration a été donnée plus tard per feu M. Clifford (*voir* ses œuvres posthumes), par M. Buchheim dans le *Mathematical Messenger* (marchant, comme il l'avoue, sur les traces de M. Tait, d'Édimbourg), par M. Ed. Weyr, par nous-même, et probablement par d'autres; mais les quatre méthodes citées plus haut paraissent être tout à fait distinctes l'une de l'autre.

Par le moyen d'une chaîne de matrices couplées (disons N), opérant non pas sur une matrice générale, mais sur une matrice x (disons du degré ω) d'une forme spéciale suivie par un autre opérateur V qui aura l'effet de réduire la matrice du degré ω de Nx (dont les éléments sont des fonctions linéaires des éléments de x) à une forme identique à celle de x, il est facile de voir qu'à l'opérateur composé VN on peut faire correspondre une matrice d'un *ordre quelconque* non supérieur à ω^2, et c'est ainsi virtuellement que Hamilton, à cause d'une transformation qu'il effectue sur l'équation linéaire générale, est tombé dans ses *Lectures* sur la matrice du troisième ordre, et ce n'est que dans les *Éléments* publiés en 1866 (après sa mort) qu'on trouve quelque allusion à l'équation identique pour les matrices du quatrième ordre.

On pourrait nommer l'opérateur composé VN, pour lequel l'équation identique est d'un degré moindre que ω^2, *nivellateur qualifié*, mais il est essentiel de remarquer que ces opérateurs ne posséderont pas les propriétés analogues à celles des matrices que possèdent ces nivellateurs purs dont il est question dans ma méthode. Comme exemple d'un nivellateur qualifié, on pourrait admettre que le x (matrice du deuxième ordre), sur lequel opère le N, aura son quatrième élément zéro, et que l'effet du V sera d'abolir le quatrième élément dans Nx, où l'on peut supposer (et cette supposition est, dans son essence, à peu près identique à la méthode des vecteurs de Hamilton) que le premier et le quatrième élément de x sont égaux, mais de signes contraires, et que l'effet de V est de substituer dans la matrice du second ordre $N(x)$ la moitié de la différence entre le premier et le quatrième élément au lieu du premier et, au lieu du quatrième, cette même quantité avec le signe algébrique contraire.

Évidemment un tel opérateur donnera naissance à une matrice et sera assujetti à une équation identique du troisième ordre. Avant de conclure, pour convaincre de la justesse de la formule importante

$$\tfrac{1}{8}[(\dot{P}')^2 P^2 - 4(\dot{P}'.P)^2] - \tfrac{1}{2}\sqrt{(I.I')}*,$$

* Pour rendre intelligible cette formule, il est nécessaire de dire que l'expression

$$\tfrac{1}{8}[(\dot{P}')^2 P^2 - 4(\dot{P}'.P)^2],$$

applicable au cas d'un nivellateur du second ordre à quatre couples de matrices, il sera bon d'en donner une démonstration parfaite *a posteriori*, ce qu'une transformation légitime rend très facile à faire. Remarquons que le déterminant du nivellateur du second ordre $\Sigma \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}(\;)\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}$ est le déterminant de la matrice suivante:

$$\begin{matrix} \Sigma a\alpha & \Sigma c\alpha & \Sigma a\beta & \Sigma c\beta \\ \Sigma b\alpha & \Sigma d\alpha & \Sigma b\beta & \Sigma d\beta \\ \Sigma a\gamma & \Sigma c\gamma & \Sigma a\delta & \Sigma c\delta \\ \Sigma b\gamma & \Sigma d\gamma & \Sigma b\delta & \Sigma d\delta \end{matrix}$$

laquelle contiendra dans le cas supposé 144 termes, puisque chaque Σ comprend 4 produits: mais, sans perdre en généralité, on peut prendre une forme de nivellateur dont le déterminant ne comprendra pas plus de 24 termes; car il est facile de démontrer que, si aux 4 matrices de gauche on substitue 4 fonctions linéaires quelconques, pourvu que sur les 4 de droite on opère une substitution contragrédiente à la substitution précédente, la valeur du déterminant ne subira nul changement. On peut donc supposer que les 4 matrices de gauche sont

$$\begin{matrix} 10 & 01 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 10 & 01 \end{matrix}$$

respectivement, et, si la formule est vérifiée dans cette supposition (vu que les *contravariants* des deux quantics associés ne sont pas affectés par les substitutions contragrédientes opérées sur les deux systèmes de matrices), elle

---

donnée dans la Note du 21 juillet [pp. 181, 184 above], a besoin d'une correction (dont je pensais avoir fait mention dans le texte): il fait lui ajouter la *racine carrée* d'un contrariant connue du quatrième degré (appartenant aux deux *formes associées*), laquelle sera une fonction rationnelle des éléments des matrices du nivellateur. Pour le cas d'un nivellateur à quatre couples de matrices, c'est la racine carrée du produit de I et I', les discriminants des deux formes associées prises séparément; en nommant les quatre matrices à gauche

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \begin{matrix} a' & b' \\ c' & d' \end{matrix} \quad \begin{matrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{matrix} \quad \begin{matrix} a''' & b''' \\ c''' & d''' \end{matrix},$$

la racine carrée de I sera égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

qu'on peut nommer le développant de ces quatre matrices; de même la racine carrée de I' sera égale au développant des quatre matrices correspondantes à droite, de sorte que le terme irrationnel dans la formule pour le nivellant à quatre couples de matrices est égal au produit de ces deux développants; dans le cas général, la partie *relativement* irrationnelle de la formule pour un nivellant sera égale à la somme de tous les produits de développants accouplés qu'on peut former en combinant quatre à quatre, ensemble, les couples de matrices qui en dépendent. Dans le cas où le nivellateur contient moins de quatre couples, la racine carrée disparaît entièrement de la formule pour le nivellant. Je nommerai $\dot{P}'.P$ et $(\dot{P}')^2 P^2$, ϑ_1 et ϑ_2 respectivement.

sera non pas seulement *vérifiée*, mais absolument *démontrée* pour les valeurs parfaitement générales des deux systèmes.

Avec ces valeurs des matrices gauches, la matrice écrite plus haut, en prenant

$$\begin{matrix} \alpha\ \beta & \alpha'\ \beta' & \alpha_1\ \beta_1 & \bar\alpha\ \bar\beta \\ \gamma\ \delta & \gamma'\ \delta' & \gamma_1\ \delta_1 & \bar\gamma\ \bar\delta \end{matrix}$$

pour les matrices à droite, devient

$$\begin{matrix} \alpha & \alpha_1 & \beta & \beta_1 \\ \alpha' & \bar\alpha & \beta' & \bar\beta \\ \gamma & \gamma_1 & \delta & \delta_1 \\ \gamma' & \bar\gamma, & \delta' & \bar\delta \end{matrix}$$

dont je nommerai le déterminant Q.

De plus, le quantic à gauche deviendra $xt - yz$, et le quantic à droite

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\,x^2 + (\bar\alpha\bar\delta - \bar\beta\bar\gamma)\,t^2 + (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\,y^2 + (\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)\,z^2$$
$$+ (1\,.\,2)\,xy + (3\,.\,4)\,zt + (1\,.\,3)\,xz + (2\,.\,4)\,yt + (1\,.\,4)\,xt + (2\,.\,3)\,yz,$$

où $\quad (1\,.\,2) = \alpha\delta' + \delta\alpha' - \beta\gamma' - \beta'\gamma, \quad (3\,.\,4) = \alpha_1\bar\delta + \delta_1\bar\alpha - \beta_1\bar\gamma - \gamma_1\bar\beta,$

....

Donc $\quad \vartheta_1 = (\alpha\bar\delta + \bar\alpha\delta - \beta\bar\gamma - \bar\beta\gamma) - (\alpha'\delta_1 + \alpha_1\delta' - \beta'\gamma_1 - \beta_1\gamma'),$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\vartheta_2 = {} & (\alpha\bar\delta + \bar\alpha\delta - \beta\bar\gamma - \bar\beta\gamma)^2 + (\alpha'\delta_1 + \alpha_1\delta' - \beta'\gamma_1 - \beta_1\gamma')^2 \\ & + 2\,(\alpha\delta - \beta\gamma)\,(\bar\alpha\bar\delta - \bar\beta\bar\gamma) + 2\,(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\,(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) \\ & - (\alpha\delta' + \delta\alpha' - \beta\gamma' - \beta'\gamma)\,(\alpha_1\bar\delta + \delta_1\bar\alpha - \beta_1\bar\gamma - \bar\beta\gamma_1) \\ & - (\alpha\delta_1 + \delta\alpha_1 - \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)\,(\alpha'\bar\delta + \delta'\bar\alpha - \beta'\bar\gamma - \bar\beta\gamma') \\ & - (\alpha\bar\delta + \bar\alpha\delta - \beta\bar\gamma - \bar\beta\gamma)\,(\alpha'\delta_1 + \alpha_1\delta' - \beta'\gamma_1 - \beta_1\gamma'), \end{aligned}$$

et $\sqrt{(I\,.\,I')}$ (pris avec le signe convenable) sera le déterminant de la matrice

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \bar\alpha & \bar\beta & \bar\gamma & \bar\delta. \end{matrix}$$

En faisant les multiplications nécessaires, on trouvera que

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_2 - \vartheta_1^2 - \sqrt{(I\,.\,I')} = 2Q,$$

ce qui démontre l'exactitude de la formule donnée pour un nivellateur du deuxième ordre à quatre couples de matrices.

D'ici à peu de temps, j'espère avoir l'honneur de soumettre à l'Académie la valeur du déterminant du nivellateur du troisième ordre à trois couples de matrices. Pour présenter l'expression générale de ce déterminant pour une matrice d'un ordre et d'une étendue quelconques*, il faudrait avoir une connaissance des propriétés des formes qui va beaucoup au delà

* C'est-à-dire pour résoudre l'équation linéaire en matrices dans toute sa généralité.

des limites des facultés humaines, telles qu'elles ne sont manifestées jusqu'au temps actuel et qui, dans mon jugement, ne peut appartenir qu'à l'intelligence suprême.

Post-scriptum.—Qu'on me permette d'ajouter une petite observation qui fournit, il me semble, une raison suffisante *a priori* pour le signe ambigu du terme $\sqrt{(I \,.\, I')}$ qui entre dans la formule donnée pour un nivellant (c'est-à-dire déterminant d'un nivellateur) du deuxième ordre.

Les déterminants d'un nivellateur et de son *conjugué* étant *identiques* en signe algébrique tout autant qu'en grandeur, ce n'est pas dans cette direction qu'on peut chercher l'origine de l'ambiguïté.

Mais, si, en se bornant aux matrices correspondantes d'un nivellateur *de la même espèce*, c'est-à-dire à main droite ou à main gauche du symbole ( ), on échange entre eux, dans chacune de ces matrices, le premier terme avec le quatrième et le deuxième avec le troisième, on verra facilement que le nivellant et en même temps les deux *quantics associés* restent absolument sans altération; mais, si l'on exécute l'une ou l'autre de ces substitutions séparément, alors, tandis que les deux quantics associés restent constants, le nivellant (quand son nivellateur possède plus de trois couples) subira un changement de valeur (et, pour l'une et l'autre substitution, le *même* changement), de sorte que pour les quatre positions qu'on peut assigner simultanément aux éléments des matrices de la même espèce sans changer en rien les quantics associés, le nivellant aura deux valeurs distinctes. Voilà, il me semble, l'explication suffisante et la véritable origine de l'ambiguïté dont il est question.

A peine est-il nécessaire de remarquer qu'on peut faire 4 autres dispositions semblables et simultanées des matrices à l'un ou l'autre côté du symbole ( ), dispositions qui donneront naissance à des nivellants identiques en valeur avec les deux dont j'ai parlé (c'est-à-dire deux à une valeur et deux à l'autre), et pour lesquelles les deux quantics associés seront sans autre changement que celui du signe algébrique.

En combinant les 24 dispositions semblables des matrices d'un côté d'un nivellateur donné avec les 24 de l'autre côté, on obtiendra un système de 576 nivellateurs corrélatifs dont les déterminants ne prendront que 3 paires de valeurs; de plus, les deux valeurs d'une quelconque de ces paires seront les racines d'une équation quadratique dont les coefficients seront des contrariants rationnels et entiers d'une des trois paires de formes quadratiques; mais le discriminant de ces trois équations sera le même *certainement* quand les nivellateurs du système seront formés avec quatre couples de matrices et *probablement* quel que soit le nombre de ces couples. Quand ce nombre est moindre que 4, le discriminant de ces trois quadratiques devient nul pour toutes les trois.