28.

SUR LA SOLUTION EXPLICITE DE L'ÉQUATION QUADRATIQUE DE HAMILTON EN QUATERNIONS OU EN MATRICES DU SECOND ORDRE.

[*Comptes Rendus,* XCIX. (1884), pp. 555—558, 621—631.]

HAMILTON, dans ses *Lectures on quaternions* (p. 632), a fourni un moyen de résoudre l'équation (en quaternions ou en matrices binaires) de la forme

$$x^2 - 2px + q = 0\,;$$

mais les circonstances les plus intéressantes de la solution ne se font pas voir dans sa méthode de traiter la question. Voici la manière analytique directe que nous employons pour obtenir x sous sa forme explicite.

On suppose $$x^2 - 2Bx + D = 0$$

l'équation identique pour x, où B et D sont des *scalars* à trouver.

En combinant ces deux équations en x, on obtient

$$2x = (p - B)^{-1}(q - D),$$

et, en supposant que la *forme associée* à [1], p, q, c'est-à-dire le déterminant de $\lambda + \mu p + \nu q$, soit

$$\lambda^2 + 2b\lambda\mu + 2c\lambda\nu + d\mu^2 + 2e\mu\nu + f\nu^2,$$

on aura*

$$4(d - 2bB + B^2)\,x_0^2 - 4(e - bD - cB + BD)\,x_0 + f - 2cD + D^2 = 0.$$

Conséquemment, en écrivant $u = B - b$, $v = D - c$,

$$d - b^2 = \alpha, \quad e - bc = \beta, \quad f - c^2 = \gamma,$$

et, en comparant cette équation avec l'équation donnée, on voit qu'on peut écrire

$$u^2 + \alpha = \lambda, \quad uv + \beta = 2\lambda(u + b), \quad v^2 + \gamma = 4\lambda(v + c).$$

De plus, puisque $p^2 - 2bp + d = 0$, on aura

$$x = \frac{(p - b + u)(q - c - v)}{2(b^2 - d - u^2)} = -\frac{(p - b + u)(q - c - v)}{2\lambda}.$$

[* The determinant of $2Bx_0 - D - 2x_0p + q$ being zero, if x_0 is a latent root of x.]

En éliminant u, v entre les trois équations qui les lient avec b, c, α, β, γ, on trouvera l'équation bien remarquable

$$e^{\lambda(2\delta_c - \delta_d)} . I = 0,$$

où I est le discriminant de la forme associée donnée plus haut, c'est-à-dire

$$I = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = df + 2bce - dc^2 - e^2 - fb^2,$$

de sorte que la quantité exponentielle symbolique représente une fonction cubique et donne lieu à une équation cubique en λ.

A chaque valeur de λ correspondent les deux valeurs $\pm\sqrt{(\lambda - \alpha)}$ de u et à chaque valeur de u (autre que $u = 0$) correspondra la seule valeur $2\lambda + \dfrac{(2\lambda + c)\,b - e}{u}$ de v.

Quand $u = 0$, $\lambda = \alpha = d - b^2$, et l'équation

$$v^2 - 4\lambda v + \gamma - 4\lambda c = 0$$

a ses deux racines finies. Donc, quand $u = 0$, il faut que $\dfrac{(2\lambda + c)\,b - e}{u}$ prenne la forme $\dfrac{0}{0}$, et à cette valeur de u (qu'on peut envisager comme deux valeurs de u réunies en une) correspondront pour v les deux valeurs données par l'équation quadratique ci-dessus.

Ainsi l'on voit qu'en général x a trois paires de valeurs déterminées et qu'aucune de ces valeurs ne cesse d'être *actuelle* et *déterminée* que pour le seul cas où l'une des trois valeurs de λ est égale à zéro, c'est-à-dire où I, l'invariant de la *pleine** forme associée à (p, q), s'évanouit.

Cela revient à dire que I est le critérium de la normalité de l'équation donnée.

Si l'on regarde p et q comme des quaternions, on aura

$$b = Vp, \quad c = Vq, \quad d = Tp^2, \quad e = SpSq - S(VpVq), \quad f = Tq^2.$$

Il est bien digne de remarque que $4I$ est identique avec $(pq - qp)^2$.

On peut démontrer que, si p et q sont des matrices d'un ordre quelconque, les racines de l'équation $x^2 - 2px + q = 0$ seront toujours (comme ici) associées en paires; car, si l'on écrit $x + x_1 = 2p$, on aura

$$x_1^2 - 2x_1 p + q = 0,$$

et conséquemment, si $p^\omega - \omega b p^{\omega-1} + \ldots = 0$ est l'équation identique connue en p et $x^\omega - \omega B x^{\omega-1} + \ldots = 0$ l'équation identique à trouver en x, à chaque valeur

* Nous avons déjà défini la *forme associée* au *corps* p, q, r, ... Par la *pleine* forme, on peut sous-entendre ce que devient la forme associée quand on adjoint au corps une matrice unitaire.

de $B-b$ correspondra une valeur égale de $b-B$, c'est-à-dire que l'équation pour trouver B sera de la forme $F(B-b)^2=0$.

En se servant de l'équation conjuguée (c'est-à-dire en x_1) dont la somme des racines sera évidemment la même que pour l'équation en x, on obtient immédiatement, dans le cas où p et q sont du second ordre, par le moyen de la formule

$$x=-\frac{(p+b-u)(q-c-v)}{2\lambda}$$

et de l'équation en λ, la valeur de Σx*.

Cette valeur sera $6\,[p+(2\delta_c-\delta_d)\,I^{\frac{1}{2}}]$, de sorte que la valeur moyenne d'une racine de l'équation $x^2-2px+q=0$ est p (la valeur moyenne pour le cas où p et q sont *scalars*), augmentée de $(2\delta_c-\delta_d)\,I^{\frac{1}{2}}$, où $I^{\frac{1}{2}}$ doit avoir le signe qui le rend égal à $\frac{1}{2}(pq-qp)$. De même on trouve

$$\Sigma x^2=2p\Sigma x-6q,$$

et ainsi la valeur moyenne de x^2 sera

$$2p^2-q+(4\delta_c-2\delta_d)\,I^{\frac{1}{2}}p,$$

et l'on peut trouver successivement, par la même méthode, la valeur moyenne d'une puissance quelconque de x. Les détails du calcul précédent, et encore d'autres propriétés de l'équation en x, seront donnés prochainement dans le *Quarterly mathematical Journal* ou quelque autre recueil mathématique. Ici on n'a voulu que produire les résultats principaux obtenus par notre méthode.

L'équation de Hamilton en quaternions ou en matrices binaires est celle que nous avons traitée dans une Note précédente. C'est l'équation

$$x^2+2qx+r=0.$$

Nous avons trouvé que la solution de cette équation dépend d'une équation cubique ordinaire en λ, à chaque valeur de laquelle correspondent deux valeurs de x, et qu'elle est normale ou régulière quand le dernier terme de cette équation diffère de zéro. L'équation est dite *régulière* ou *normale* quand sa solution dépend du nombre maximum de racines déterminées, c'est-à-dire de trois paires de racines déterminées ; chaque paire est alors connue comme fonction de λ, q, r et des paramètres b, c, d, e, f qui dépendent de q

* On aura
$$\Sigma x=-\Sigma\frac{(p-b+u)(q-c-v)}{2\lambda},$$
$$\Sigma(2p-x)=-\Sigma\frac{(q-c-v)(p-b+u)}{2\lambda}.$$

On retranche une équation de l'autre, on substitue pour $\Sigma\frac{1}{\lambda}$ sa valeur tirée de l'équation cubique en λ, et on écrit $pq-qp=2I^{\frac{1}{2}}$.

et r et sont définis au moyen du déterminant de $u+vq+wr$* qu'on a supposé être mis sous la forme

$$u^2+2buv+2cuw+dv^2+2evw+fw^2,$$

d'où

$$b=Sq,\quad c=Sr,\quad d=Tq^2,\quad f=Tr^2e=SqSr-S(Vq\,.\,Vr)\,*.$$

Dans ce cas, on peut dire que la solution elle-même est régulière.

En nommant I l'invariant de la forme ternaire, écrite plus haut, c'est-à-dire en posant

$$I=df+2bce-b^2f-c^2d-e^2,$$

nous avons trouvé que l'équation en λ peut être mise sous la forme

$$e^{\lambda\Omega}I=0,$$

où

$$\Omega=2\delta_c-\delta_d,$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$4\lambda^3+(4c-4d)\lambda^2+(4be-4cd+c^2-f)\lambda+I=0.$$

Ainsi, afin que la solution soit régulière, il faut et il suffit que I diffère de zéro†.

De là il suit que, dans le cas d'une équation régulière, deux x ne peuvent être égaux, à moins qu'ils n'appartiennent à la même paire ou bien que deux λ ne deviennent égaux; car x peut être exprimé comme une fonction linéaire de qr, q, r, 1, dans laquelle le coefficient de qr est $-\dfrac{1}{2\lambda}$.

Donc, si deux des x sont égaux sans que deux λ le soient, une équation linéaire subsistera entre pq, p, q, 1, mais dans ce cas nous avons trouvé ailleurs que $I=0$, et la solution cesse d'être régulière.

Nous allons pour le moment nous borner au cas où l'équation est régulière, et conséquemment nous n'aurons qu'à considérer les cas où il y a égalité ou entre deux racines de λ ou bien entre deux valeurs de x qui correspondent à la même valeur de λ.

Si l'on suppose que deux valeurs de λ soient égales, il en résultera que deux des paires de valeurs de x deviendront identiques, de sorte qu'une seule condition suffira à réduire le nombre des racines distinctes de 6 à 4, c'est-à-

* Par un oubli très regrettable nous avons pris, dans une Note précédente, pour le coefficient de $2xy$ dans la forme associée à

$$(up+vq+wr+\ldots),$$

$S(VpVq)$ au lieu de sa vraie valeur, $\quad SpSq-S(VpVq)$,

et de même pour les autres coefficients des termes mixtes, de sorte que le calcul du déterminant du *nivellateur* $\Sigma p(\quad)p'$ dans la Note sur l'achèvement de la solution de l'équation linéaire en quaternions est erroné et a besoin d'être fait de nouveau.

† Conséquemment, quand l'équation est régulière, ni q ni v ne peut devenir zéro ; car, dans l'un et l'autre de ces deux cas, $I=0$; aussi, pour la même raison, r ne peut pas être une fonction de q.

dire que les valeurs de x, qui, en général, sont de la forme m, m'; n, n'; p, p', deviendront de la forme m, m'; n, n'; n, n'.

Au lieu de calculer directement le discriminant de l'équation en λ, qui donnera un résultat très compliqué, nous allons montrer qu'on peut substituer le discriminant de la forme très simple biquadratique

$$\left(1,\ b,\ \frac{c+2d}{3},\ e,\ f\right)(r,\ s)^4.$$

Mais préalablement il sera utile d'opérer une transformation linéaire sur l'équation en λ.

Écrivons $\lambda = \mu + d$; l'équation en μ sera

$$4\mu^3 + 4(c+2d)\mu^2 + [(c+2d)^2 + 4be - f]\mu + 2b(c+2d)e - b^2 f - e^2 = 0.$$

On voit donc que le discriminant qu'on veut calculer est une fonction complète de b, $c+2d$, e, f.

Nous avons trouvé $u^2 = \lambda - d + b^2$, c'est-à-dire $\mu + b^2$. On aura donc

$$\begin{aligned} &4u^6 + 4(c+2d-3b^2)u^4 \\ &\quad + [12b^4 - 8(c+2d)b^2 + (c+2d)^2 + (4be-f)]u^2 \\ &\quad - [2b^3 - b(c+2d) + e]^2 *. \end{aligned}$$

Dans l'équation donnée, substituons $x + \epsilon$, où ϵ est un infinitésimal (*scalar* si l'on parle de quaternions ou représentant la matrice $\begin{matrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{matrix}$ si l'on parle de matrices); alors p sera augmenté par ϵ et q par $2\epsilon p$, et ainsi $(\lambda + \mu p + \nu q)$ deviendra $(\lambda + \epsilon\mu) + (\mu + 2\epsilon\nu)p + \nu q$, de sorte qu'en désignant le discriminant cherché par D, l'accroissement de D est nul quand λ et μ deviennent $\lambda + \epsilon\mu$, $\mu + \epsilon\nu$ simultanément, c'est-à-dire quand la forme ternaire en u, v, w devient

$$\begin{aligned} &u^2 + 2(b+\epsilon)uv + 2(c+2\epsilon b)uw + (d+2\epsilon b)v^2 \\ &\qquad + (2e + 2\epsilon c + 4\epsilon d)vw + (f + 4\epsilon e)w^2. \end{aligned}$$

Donc $$[a\delta_b + 2b\delta_c + 2c\delta_d + (c+2d)\delta_e + 4e\delta_f]D = 0.$$

Écrivons $c + 2d = 3m$. On sait que D est une fonction complète de b, m, e, f, de sorte que, par rapport à D (comme opérande), $\delta_c + \delta_d = \delta_m$; ainsi, en écrivant $1 = a$, on aura

$$(a\delta_b + 2b\delta_m + 3m\delta_e + 4e\delta_f)D = 0.$$

D sera donc ou un invariant ou un sous-invariant de la forme biquadratique (a, b, m, e, f).

* u sera la partie scalar de x si l'équation est donnée sous la forme quaternionique, ou bien la moitié de la somme du premier et du quatrième élément de x si l'équation est donnée entre des matrices. Hamilton a trouvé l'équation équivalente à celle donnée pour u dans le texte; mais, dans sa formule, les coefficients sont exprimés sous une forme compliquée et assez difficile à débrouiller.

Mais, en faisant attention à l'équation en μ, on voit que D sera de l'ordre 6 dans les coefficients et du poids 12; il est donc un invariant et une fonction linéaire de s^3 et t^2 (où s et t sont les deux invariants irréductibles) de la forme biquadratique.

En nommant Δ le discriminant de cette forme, on a

$$\Delta = s^3 - 27t^2,$$

dont une partie sera $\qquad f^3 - 27b^4 f^2;$

mais on voit, par l'examen de l'équation en μ, qu'une partie de D sera

$$16b^4 f^2 - \frac{16 f^3}{27}$$

et, conséquemment, $\qquad D = -\tfrac{16}{27}\Delta.$

Il s'ensuit que la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de deux des racines de l'équation donnée avec deux autres est tout simplement $\Delta = 0$, comme nous l'avons déjà énoncé.

Cherchons la condition pour laquelle les trois paires coïncideront toutes dans une seule paire; alors les trois racines de μ deviennent toutes égales, et l'on a non seulement

$$\Delta = 0,$$

mais encore $\qquad (12m^2) - (9m^2 + 4be - f) = 0,$

c'est-à-dire $\qquad f - 4be + 3m^2 = 0 \quad \text{ou} \quad s = 0.$

Donc les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'il n'y ait que deux racines distinctes chacune, prises trois fois dans la solution de l'équation donnée, seront

$$s = 0, \quad t = 0.$$

On peut aussi demander quelle est la condition ou plutôt quelles sont les équations de condition pour que deux racines de la même paire soient égales.

Dans ce cas, nous avons trouvé que $u = 0$; cela exige que le dernier terme dans l'équation à u^2 devienne zéro. On aura donc, en vertu de l'équation en u^2,

$$ae - 3bm + 2b^3 = 0,$$

c'est-à-dire que le sous-invariant gauche ou bien le premier coefficient du Hessien à la forme biquadratique s'évanouit. Mais cela ne suffit pas pour que les deux x d'une paire deviennent parfaitement identiques. Il faut aussi que les deux valeurs de v, qui correspondent à la valeur zéro de u, ou que les deux racines de l'équation

$$v^2 - 4\lambda(v + c) + \gamma = 0,$$

où $\qquad \lambda = \alpha = d - b^2,$

deviennent égales, c'est-à-dire que

$$\gamma + c^2 - (2\alpha + c^2) = 0,$$

ou bien, puisque $\gamma = f - c^2$, que

$$f - (3m - 2b^2)^2 = 0\,;$$

à cette équation il faut joindre l'équation déjà trouvée

$$ae - 3bm + 2b^3 = 0\,;$$

le système de ces deux équations exprime la condition de la coïncidence des deux x d'une paire. Quoique $f - (3m - 2b^2)^2 = 0$ ne soit pas en elle-même un sous-invariant, les deux équations ci-dessus constituent (comme elles doivent le faire) un *plexus* sous-invariantif; car on trouvera

$$(a\delta_b + 2b\delta_m + 3m\delta_e + 4e\delta_f)\,[af - (3am - 2b^2)^2] = 4\,(ae - 3bm + 2b^3) = 0.$$

En effet, puisque $f - (3m - 2b^2)^2$ ne diffère de $f - 9m^2 + 2abe + 6b^2m$ (le second coefficient du Hessien) que par $-\,2b\,(ae - 3bm + 2b^3)$, on peut substituer, pour le plexus écrit plus haut, le plexus $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, où H_1, H_2 sont le premier et le second coefficient du Hessien de la forme quadratique.

Or il est facile de démontrer que, quand dans la forme $(a, b, m, e, f)\,(x, y)$ a n'est pas zéro, mais que les deux premiers coefficients du covariant irréductible gauche le sont, le covariant s'évanouit complètement*, et la forme biquadratique a deux paires de racines égales.

On sait aussi que, quand les deux invariants irréductibles s'évanouissent, il y a trois racines égales, et, quand en même temps les deux invariants et le covariant gauche s'évanouissent, toutes les racines de la biquadratique sont égales.

Ainsi on voit que les seuls cas d'égalité possibles entre les racines de l'équation quadratique donnée, quand sa solution est régulière, correspondent aux quatre cas d'égalité entre les racines de la biquadratique ordinaire qui s'y est associée.

En prenant les quatre cas: 1° ou la quadratique a deux racines égales; 2° ou elle a deux paires de racines égales; 3° trois racines égales; 4° toutes ses racines égales; alors la quadratique donnée aura, dans le premier cas, deux paires de racines égales; dans le deuxième, quatre racines égales; dans le troisième, trois paires de racines égales, et dans le dernier cas toutes ses racines seront égales.

Quant au rapport de la biquadratique binaire à la forme ternaire quadratique, on passe de la seconde à la première, en se servant de la substitution dont s'est servi notre très honoré collègue, M. Darboux, dans sa belle Note sur la résolution de l'équation biquadratique (*Journal de Liouville*, t. XVIII. p. 220). On n'a qu'à faire $x = u^2$, $y = 2uv$, $z = v^2$, et la forme ternaire passe dans la forme binaire biquadratique. On voit ainsi que les genres de solutions régulières de l'équation en quaternions donnée dépendent ex-

* Quand les deux premiers coefficients du covariant irréductible gauche d'une biquadratique binaire s'évanouissent, le discriminant s'évanouit nécessairement: nous avons trouvé que ce discriminant pris négativement égale 16 fois le produit des coefficients extrêmes, moins le produit du second et l'avant-dernier coefficient du covariant gauche.

clusivement de la relation entre la conique qui s'y est associée avec la conique absolue $y^2 - 4xz$. Dans le cas le plus général, les deux courbes se coupent en quatre points; dans les quatre autres cas, il y aura l'une ou l'autre des quatre espèces de contact entre les deux coniques.

Mais, de plus, on voit évidemment que cette idée des deux coniques peut être étendue à l'équation de Hamilton, même pour le cas où la solution devient irrégulière.

Dans ce cas, la forme ternaire, associée à l'équation $x^2 + qx + r$, perdra sa forme de conique et deviendra un système de deux lignes droites qui se croisent ou de deux lignes coïncidentes. Dans la première supposition, il y aura le cas où les deux droites toutes les deux coupent et les cas où l'une ou toutes les deux touchent la conique fixe; il y aura aussi les cas où la conique fixe passe par le point d'intersection des deux droites en les coupant toutes les deux ou en touchant une. Dans la seconde supposition, il y aura les deux cas où les droites coïncidentes coupent ou touchent la conique fixe.

Ainsi donc il nous paraît qu'on peut affirmer avec pleine confiance que, dans l'équation de Hamilton*, il y a exactement douze cas, ou au moins douze cas principaux, à considérer†. Nous devons cette méthode si simple

* Quant à l'équation plus générale $px^2+qx+r=0$, dans le cas où le discriminant ou le tenseur de p devient zéro et que, par conséquent, la forme ne rentre pas dans celle de Hamilton (puisqu'on ne peut plus diviser l'équation par p), il peut se présenter encore un grand nombre de cas singuliers que nous n'avons pas encore étudiés à fond.

† Cela donne lieu à une réflexion curieuse. Si l'on considère tous les genres de rapports qui peuvent avoir lieu entre une vraie conique et une conique variable et capable de dégénérer en n'excluant pas les deux cas où la conique variable coïncide avec l'autre ou s'évanouit tout à fait, le nombre de ces genres sera 14, qui est le nombre de doubles décompositions du nombre 4, savoir:

$$4:\ 3,1:\ 2,2:\ 2,1,1:\ 1,1,1,1:\ 3:1\ \ 2,1:1\ \ 1,1,1:1\ \ 2:2\ \ 1,1:2\ \ 1,1:1,1$$
$$2:1:1\ \ 1,1:1:1\ \ 1:1:1:1.$$

De même on trouvera facilement que, pour le cas de formes binaires, le nombre de genres semblables sera 6, car, ayant sur une ligne droite deux points fixes et deux points variables, ces derniers peuvent être distincts entre eux-mêmes en coïncidant avec un ou tous les deux ou avec ni l'un ni l'autre des deux premiers, ou bien ils peuvent être réunis dans un seul point qui peut coïncider ou ne pas coïncider avec un des points fixes, et finalement ils peuvent disparaître; or le nombre de décompositions doubles du nombre 3, c'est-à-dire

$$3:\ 2,1:\ 1,1,1:\ 2:1\ \ 1,1:1\ \ 1:1:1,$$

est aussi 6.

Mais nous avons démontré autrefois, dans le *Philosophical Magazine*, que pour le cas de deux formes quadratiques de n variables dont chacune reste générale, c'est-à-dire n'a pas le discriminant zéro, le nombre des genres de rapport est exactement le nombre de doubles décompositions du nombre n. C'est une question qui mérite d'être examinée, si cette identité entre le nombre de genres pour n variables dans le second cas avec celui pour le nombre $n-1$ dans le premier, reste vraie pour toute valeur de n. Une considération qui s'y oppose, c'est que, dans le premier cas, quand $(n-1=1)$ le nombre de genres, au lieu d'être 3 (le nombre de décompositions doubles de 2), n'est que 2, mais il peut arriver que pour ce cas (le cas d'une seule variable), la forme générale étant la même que la forme de coïncidence parfaite, ce genre doit compter pour deux, et ainsi la loi se maintiendra.

de dénombrement à la connaissance que nous avons acquise du Mémoire ci-dessus cité de M. Darboux*.

Mais ce qui plus est, on peut beaucoup simplifier, comme on va voir, la solution de l'équation quadratique $fx = px^2 + qx + r = 0$.

En regardant pour le moment x comme une quantité ordinaire, soient Fx le déterminant de la matrice $x^2p + xq + r$ et ϕx un quelconque des six facteurs quadratiques de Fx; alors $\phi x = 0$ sera l'équation identique d'une des racines de $fx = 0$, et ces deux équations, en éliminant x^2, donneront la valeur précise de cette racine†. De même nous ferons voir qu'en général, quel que soit le degré (n) de fx (fonction rationnelle entière et unilatérale de x), lequel, comme aussi chaque coefficient, est une matrice d'un ordre donné (ω) quelconque, en prenant le déterminant Fx de fx (où pour le moment on regarde x comme une quantité ordinaire), chaque facteur du degré ω de Fx sera la fonction identiquement zéro d'une des racines (prise négativement) de l'équation $fx = 0$, et réciproquement.

Ce beau théorème‡, *pulcherrima regula*, repose sur les considérations suivantes :

Soit $\phi\lambda$ le déterminant de $\lambda + x$; alors on peut démontrer facilement que $\phi x = 0$ sera l'équation identique de x.

Or soit $fx = 0$, alors $f(-\lambda) = f(-\lambda) - f(x)$ et conséquemment contiendra le facteur $x + \lambda$. Donc le déterminant de $f(-\lambda)$ contiendra le déterminant de $(\lambda + x)$, c'est-à-dire contiendra $\phi\lambda$, où $\phi x = 0$ est l'équation identique.

Ainsi ϕx (la fonction de x qui est identiquement zéro) ne peut qu'être un facteur du déterminant de $f(-x)$ pris comme si x était une quantité ordinaire. De plus, puisqu'en général ce déterminant sera une fonction irréductible de x, de sorte qu'on ne peut plus distinguer une racine d'avec une autre, tout facteur qu'il contient dont le degré est égal à l'ordre de x sera la fonction identiquement nulle d'une des racines de l'équation $fx = 0$.

* On doit remarquer que le discriminant de l'équation en λ ou μ ou u^2 est le même que celui de la biquadratique associée à l'équation donnée ; en effet, l'équation en μ a pour racines $\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{4}$, $\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{4}$, $\frac{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}{4}$, où α, β, γ, δ sont les racines de cette biquadratique ; ainsi on peut dire que les six racines cherchées sont associées respectivement aux six côtés du quadrangle complet formé par les quatre points d'intersection de la conique appartenant aux coefficients de l'équation donnée avec la conique absolue $y^2 - 4xz$.

On comprend que la forme appartenant à p, q, r veut dire le déterminant de la matrice $xp + yq + zr$ qui est une courbe dont l'ordre sera toujours celui des matrices p, q, r.

† Ainsi on possède une méthode immédiate, et qui s'applique à tous les cas qui peuvent se présenter pour résoudre l'équation de Hamilton. L'analyse précédente suffit pour en donner une démonstration qui a été passée dans le texte.

‡ On peut donner à cet énoncé une autre forme, à savoir : *Toute racine latente de chaque racine de fx* (fonction rationnelle entière et unilatérale par rapport à x) *est une racine* (prise négativement) *du déterminant de fx* (où x est traité comme une quantité ordinaire) *et réciproquement chaque racine ainsi prise de ce déterminant est une racine latente d'une des racines de fx.*

Il paraît donc (s'il n'y a aucune erreur dans ce dernier raisonnement) que le nombre des racines de fx sera le nombre exact de combinaisons de $n\omega$ choses prises ω à ω ensemble, où n est le degré de fx en x et ω l'ordre des matrices qui paraissent là-dedans; conséquemment le nombre des racines sera

$$\frac{\pi n\omega}{\pi(n-1)\,\omega\,.\,\pi\omega}\,*;$$

ainsi, par exemple, le nombre des racines dans le cas d'une équation du degré n en quaternions sera $2n^2 - n$†.

Pour trouver ces racines, on n'a qu'à combiner les deux équations $fx = 0$ qui ne change pas, avec $\phi x = 0$, qui varie avec chaque combinaison des racines de Fx [c'est-à-dire le déterminant de $f(-x)$], et, en éliminant les puissances supérieures de x, on trouvera une équation linéaire qui sert à donner x sous la forme d'une fraction : par des procédés qui ne présentent nulle difficulté, cette fraction peut être ramenée (au moins pour le cas des matrices binaires) à la forme d'une autre fraction dont le dénominateur sera une fonction exclusivement des coefficients de la *forme* associée à l'ensemble des coefficients de l'équation donnée dont nous nous proposons d'essayer de trouver la valeur générale. Ce dénominateur sera toujours (comme dans le cas que nous avons traité en détail dans ce qui précède) le *criterium* de la *régularité* de l'équation donnée. Quand ce *criterium* s'évanouit (et pas autrement), quelques-unes des racines vont à l'infini, c'est-à-dire cessent d'être actuelles et deviennent purement conceptuelles.

En général, pour résoudre l'équation unilatérale du degré n et l'ordre ω, on n'aura besoin que de résoudre une équation ordinaire du degré $n\omega$. Si une racine de l'équation donnée est connue, on n'aura qu'à résoudre deux équations ordinaires des degrés ω et $(n-1)\omega$ respectivement. Dans le cas d'une équation quadratique, quand une racine est donnée, on peut trouver immédiatement l'équation identique d'une seule autre qui y est associée, et conséquemment en déterminer la valeur sans résoudre une équation d'un degré supérieur au premier. Quand deux racines de l'équation résolvante (celle du degré $n\omega$) sont égales, on a $\dfrac{\pi(n\omega-2)}{\pi(\omega-1)\,.\,\pi[(n-1)\,\omega-1]}$ paires de racines égales dans l'équation du degré n qui est à résoudre.

* Dans le cas le plus général d'une équation en x du degré n et de l'ordre ω par rapport aux matrices, on peut supposer un nombre indéfini de termes dans l'équation. Chacun de ces termes sera composé d'un nombre pas plus grand que n des x dont chacun sera suivi et précédé par une matrice multiplicatrice. En appliquant la méthode algébrique directe pour résoudre cette équation, on sera amené à un système de ω^2 équations du degré n chacune. Ainsi le nombre des racines sera en général n^{ω^2}.

† Cela démontre que le nombre 21 que nous avions trouvé pour le cas de $n=3$ dans le *Philosophical Magazine* (mai 1884) [p. 229 below] et la formule générale que nous avons basée là-dessus sont erronés ; la raison en est évidemment que l'ordre *apparent* du système d'équations qui nous a fourni ce résultat surpasse l'ordre *actuel* de 6 unités.

Nous n'avions pas discuté en détail ces équations, et ainsi cet abaissement du degré nous a échappé. C'est un point curieux qui reste à discuter.

Prenons comme exemple de l'application de la méthode l'équation en quaternions

$$q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0 = 0.$$

La fonction résolvante sera

$$(3.3)x^6 + (3.2)x^5 + (3.1 + 2.2)x^4(3.0 + 2.1)x^3$$
$$+ (2.0 + 1.1)x^2(1.0)x + (0.0) = 0,$$

où en général $i.i$ et $i.j$ signifient

$$Tq_i^2, \quad 2[Sq_iq_j - S(Vq_iVq_j)]$$

respectivement.

Les quinze facteurs quadratiques de cette fonction égalés à zéro donneront chacun une équation quadratique à laquelle doit satisfaire une des quinze racines de l'équation donnée, et, en combinant séparément chacune de ces équations avec la cubique donnée, on peut éliminer x^3 et x^2 et obtenir ainsi quinze équations linéaires pour déterminer les quinze racines voulues.