26.

SUR LA SOLUTION DU CAS LE PLUS GÉNÉRAL DES ÉQUATIONS LINÉAIRES EN QUANTITÉS BINAIRES, C'EST-À-DIRE EN QUATERNIONS OU EN MATRICES DU SECOND ORDRE.

[*Comptes Rendus,* XCIX. (1884), pp. 117, 118.]

SOIENT p, q deux matrices d'un ordre donné et servons-nous du symbole $p\,(\ )\,q$ pour signifier l'opérateur, lequel, appliqué à une autre matrice x du même ordre, donne pxq.

Alors, si l'on pose

$$p_1(\ )\,q_1 + p_2(\ )\,q_2 + \ldots + p_n(\ )\,q_n = \phi,$$

ϕx sera une matrice dont chaque élément sera une fonction linéaire des éléments de x; conséquemment, en supposant que les matrices p, q sont de l'ordre ω, on parvient ainsi à une matrice de l'ordre ω^2, et conséquemment ϕ sera assujetti à une équation identique de l'ordre ω^2; disons $F = 0$.

Je vais donner la valeur de F pour le cas où $\omega = 2$, c'est-à-dire où F sera une fonction du quatrième degré. Supposons que P et P' sont deux quantics du second ordre dans les deux systèmes de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ contragredients. Alors, si l'on représente par $\dot{P}'$ ce que devient P' quand on écrit $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_n}$ au lieu de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $(\dot{P}')^i \,.\, P^i$ sera un invariant du système donné pour toute valeur de i.

Considérons le cas où $P = ax^2 + bxy + cy^2$ et $P' = \alpha\xi^2 + \beta\xi\eta + \gamma\eta^2$. Dans ce cas, on trouvera que $\frac{1}{8}[(\dot{P}')^2 P^2 - 4(\dot{P}' \,.\, P)^2]$ sera identique avec le résultat de $ax^2 + bxy + cy^2$, $\gamma x^2 - \beta xy + \alpha y^2$, de sorte qu'on peut le nommer le *contra-résultant* des formes (a, b, c), (α, β, γ). Je nommerai donc, en général, l'invariant $\frac{1}{8}[(\dot{P}')^2 P^2 - 4(\dot{P}' \,.\, P)^2]$ le *quasi contra-résultant* des deux formes P, P' quand elles contiennent un nombre quelconque de variables.

Or, en revenant à l'expression ϕ, nommons P le déterminant de

$$u_1 p_1 + u_2 p_2 + \ldots + u_n p_n + \phi . v$$

et Q le déterminant de

$$u_1 q_1 + u_2 q_2 + \ldots + u_n q_n - v,$$

où ϕ, pour le moment, est traité comme une quantité ordinaire. J'ai trouvé que le quasi contra-résultant de P, Q, quand ϕ appartient à des matrices du second ordre (lequel sera une fonction biquadratique de ϕ), égalé à zéro, est l'équation identique cherchée en ϕ.

Il est probable, mais je n'en suis pas encore absolument convaincu, qu'une méthode analogue donnera l'équation identique de ϕ pour des matrices d'un ordre quelconque.

Si l'on suppose que les p et les q sont des quaternions, rien ne change avec l'exception que P et Q seront définis comme étant les modules (les *tensors* carrés) au lieu d'être les déterminants de $\phi v + \Sigma pu$, $-v + \Sigma qu$ respectivement.

Connaissant ainsi l'équation identique de ϕ, on peut résoudre immédiatement l'équation

$$\Sigma(pxq) = T,$$

car, en écrivant $p(\quad)q = \phi$, on a l'équation connue

$$\phi^4 + B\phi^3 + C\phi^2 + D\phi + E = 0,$$

et, conséquemment, en exceptant toujours le cas où $E = 0$ (dans lequel cas l'équation devient ou impossible ou indéterminée), on trouve

$$x = \phi^{-1}T = -\frac{D + C\phi + B\phi^2 + \phi^3}{E}T.$$

Par exemple, si l'équation donnée est $pxq + rxs = T$,

$$\begin{aligned}
\phi T &= pTq + rTs,\\
\phi^2 T &= p^2Tq^2 + prTsq + rpTqs + r^2Ts^2,\\
\phi^3 T &= p^3Tq^3 + p^2rTsq^2 + prpTqsq\\
&\quad + rp^2Tq^2s + pr^2Ts^2q + rprTsqs + r^2pTqs^2 + r^3Ts^3,
\end{aligned}$$

et, éventuellement, en ne se servant que des coefficients qui entrent dans les fonctions P et Q par le moyen de formules connues, on réduit x à une somme de multiples de termes de la forme

$$pT,\ rT,\ prT;\ pTq,\ rTq,\ prTq;\ pTqs,\ rTqs,\ prTqs,$$

et ainsi en général. Donc le problème de la résolution des équations linéaires est complètement résolu ; seulement il reste à traiter en détail le cas singulier où la matrice appartenant à ϕ est *vide*.