24.

SUR LES ÉQUATIONS MONOTHÉTIQUES.

[*Comptes Rendus*, XCIX. (1884), pp. 13—15.]

DANS une Note précédente sur une extension de la loi de Harriot, j'ai eu occasion de considérer les équations dites *monothétiques* dont tous les coefficients sont des fonctions d'une seule matrice. Or il y a une circonstance très intéressante et importante relative aux équations de cette forme qu'il est essentiel de faire connaître ; car, à défaut d'une telle explication, le lecteur de la Note citée pourrait facilement être induit dans une erreur très grave. Voici en quoi consiste l'addition à faire.

Supposons que tous les coefficients d'une équation donnée soient des fonctions d'une seule matrice m. En appelant x l'inconnue, on peut résoudre l'équation en regardant x comme fonction de m, et l'on trouvera ainsi n^ω racines, en supposant que n soit le degré de l'équation et ω l'ordre de m. Ces racines seront parfaitement déterminées : mais on n'a nullement le droit de supposer qu'il n'y a pas d'autres racines qui ne sont pas des fonctions de m, qu'on peut nommer racines *aberrantes*, et un exemple, des plus simples qu'on puisse imaginer, suffira à démontrer que de telles racines, en effet, existent ; je me servirai, pour cet objet, de l'équation en quaternions (ou matrices binaires) $x^2 - px = 0$.

En effet, on connaît déjà, *a priori*, la possibilité de l'existence des racines aberrantes, car l'équation en matrices $x^n + q = 0$, quand q est une matrice *scalar* $\left(\text{comme si, par exemple, } q = \begin{Bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{Bmatrix}\right)$, possède, on le sait, bien des racines qui ne sont pas scalars et conséquemment ne sont pas des fonctions de q, et, de plus, ces racines contiennent des constantes *arbitraires*. Comme on va le voir, c'est aussi le cas pour l'équation $x^2 - px = 0$, qui possède une seule constante.

Si l'on veut trouver ses racines normales (ou non aberrantes), on n'a qu'à résoudre cette équation comme une équation ordinaire, et l'on trouve ainsi

$$x = \tfrac{1}{2}\{p + \surd(p^2)\}.$$

En nommant r et s les racines latentes de p, on obtient par ma formule d'interpolation (pour ainsi dire), récemment citée par M. Weyr,

$$x = \frac{1}{2}\left(p \pm \frac{p-s}{r-s}r \pm \frac{p-r}{s-r}s\right),$$

c'est-à-dire $x = 0$, p, $\frac{r(p-s)}{r-s}$, $\frac{s(p-r)}{s-r}$, et il n'y a pas d'autres racines de ce caractère. Mais sortons de cette restriction arbitraire (produit de la paresse de l'esprit humain, qui se fatigue enfin en voyant sans cesse se reproduire des horizons nouveaux et inattendus), et posons hardiment

$$x = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}, \quad p = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix},$$

où α, β, γ, δ sont les quantités à déterminer.

Puisqu'on fait abstraction des solutions $x = 0$, $x = p$, on sent, en vertu de la *troisième loi du mouvement algébrique*, que x et $x - p$ auront chacun un degré de nullité (car leur produit possède deux degrés); ainsi, si $\alpha + \delta = 0$, on aura

$$x^2 = 0,$$

donc aussi

$$px = 0,$$

et p sera aussi une matrice vide, c'est-à-dire qu'on aura

$$ad - bc = 0.$$

La solution pour ce cas (dont, dans ce qui suit, je veux faire abstraction) sera

$$x = \lambda \begin{Bmatrix} ac & -a^2 \\ a^2 & -ac \end{Bmatrix},$$

λ étant arbitraire.

Dans tout autre cas, en égalant la raison du second au troisième membre de x^2 avec la même pour px, on trouve sans difficulté que x sera de la forme

$$\begin{matrix} -\lambda(d-r) & \lambda b \\ \mu c & -\mu(a-r) \end{matrix}$$

où r et s sont les racines latentes de p, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$r^2 - (a+d)r + ad - bc = 0.$$

Alors, en calculant x^2 et px, et en les égalant terme à terme, on obtient les quatre équations suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda(d-r)^2 \quad + \mu bc \qquad &= bc - a(d-r), \\ b[\lambda(d-r) + \mu(a-r)] &= -br, \\ c[\lambda(d-r) + \mu(a-r)] &= -cr, \\ \lambda bc \qquad + \mu(a-r)^2 &= bc - d(a-r). \end{aligned}$$

En écartant le cas spécial pour lequel $b=0$ et $c=0$, on voit (et c'est M. Franklin, de Baltimore, qui le premier s'est aperçu de cette conclusion capitale) que toutes ces équations seront satisfaites avec la seule supposition

$$\lambda(d-r)+\mu(a-r)+r=0,$$

de sorte qu'une constante reste parfaitement libre dans la solution aberrante de l'équation $x^2-px=0$.

Dans le cas où $p=\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & d \end{matrix}$ on trouvera facilement les deux solutions déterminées

$$x=\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad x=\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{matrix}.$$

Dans ses *Lectures sur les quaternions,* Hamilton n'a pas mis le doigt sur les cas véritablement singuliers des équations quadratiques unilatérales. La condition de singularité, c'est-à-dire de la présence de l'un ou de l'autre des cas où une ou plusieurs des trois paires de racines de l'équation $px^2+qx+r=0$ disparaissent ou deviennent indéterminées (c'est-à-dire affectées de constantes arbitraires), peut se résumer dans la seule équation $I=0$, où I est l'invariant quartique ternaire quadratique (en u, v, w) qui exprime le déterminant d'une matrice $up+vq+wr$.