21.

SUR LA CORRESPONDANCE ENTRE DEUX ESPÈCES DIFFÉRENTES DE FONCTIONS DE DEUX SYSTÈMES DE QUANTITÉS, CORRÉLATIFS ET ÉGALEMENT NOMBREUX.

[*Comptes Rendus*, XCVIII. (1884), pp. 779—781.]

VOICI le théorème à démontrer, dans lequel, par *somme-puissance*, on sous-entend une somme de puissances de quantités données :

A i quantités on peut en associer i autres telles, que chaque fonction symétrique (qui est une fonction des différences) des premières sera une fonction des sommes-puissances du 2^e^*, du* 3^e^*, ..., du* $i^{\text{ième}}$ *ordre des dernières.*

Faisons, pour plus de clarté, $i = 3$.

Soient r_1, r_2, r_3 les racines de l'équation

$$fr = ar^3 + br^2 + cr + d = 0.$$

En prenant b, c, d; r_1, r_2, r_3 comme deux systèmes corrélatifs de variables indépendants, on trouve

$$\delta_b = -\Sigma \frac{r^2}{f'r}\delta_r, \quad \delta_c = -\Sigma \frac{r}{f'r}\delta_r, \quad \delta_d = -\Sigma \frac{1}{f'r}\delta_r.$$

Donc $$3a\delta_b + 2b\delta_c + c\delta_d = -\Sigma\,\delta_r,$$

$$a\delta_b + \ b\delta_c + c\delta_d = d\,\Sigma \frac{1}{rf'r}\delta_r.$$

Soient $a = \alpha$, $b = 3\beta$, $c = 3.2.\gamma$, $d = 3.2.1.\delta$, et soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les racines de l'équation

$$\alpha\rho^3 + \beta\rho^2 + \gamma\rho + \delta = 0.$$

Alors, si $\Sigma\,\delta_r\,\phi = 0$, on aura $(\alpha\delta_\beta + \beta\delta_\gamma + \gamma\delta_\delta)\,\phi = 0.$ C.Q.F.D.

L'intégrale générale de la première équation est

$$\phi = \mathfrak{F}(r_1 - r_2,\ r_1 - r_3),$$

et celle de la dernière est

$$\phi = \mathfrak{F}_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2,\ \rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3).$$

Ces deux intégrales sont donc identiques, et, le raisonnement étant général pour une valeur quelconque de i, on voit que chaque fonction des différences des r doit pouvoir s'exprimer comme une fonction de $i-1$ sommes-puissances consécutives des ρ (commençant avec la seconde), les r et les ρ étant liés ensemble par les équations

$$ar^i + br^{i-1} + cr^{i-2} + dr^{i-3} + \ldots = 0,$$

$$a\rho^i + \frac{b}{i}\rho^{i-1} + \frac{c}{i(i-1)}\rho^{i-2} + \frac{d}{i(i-1)(i-2)}\rho^{i-3} + \ldots = 0,$$

et conséquemment une fonction *symétrique* des différences des r sera une fonction rationnelle et entière des $i-1$ puissances consécutives (dont on a déjà fait mention) des ρ.

En prenant $i = \infty$, on voit que le théorème équivaut à dire que tous les *sous-invariants*, sources des covariants de $(a, b, c \between x, y)^2$, $(a, b, c, d \between x, y)^3, \ldots$ (à l'infini), seront des fonctions des sommes-puissances prises à l'infini, avec la seule exception de la somme linéaire, des racines de l'équation

$$a + bx + \frac{c}{1\,.\,2}x^2 + \frac{d}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots \text{ (à l'infini).}$$

Tel est le théorème capital découvert par M. le capitaine Mac-Mahon, de l'Artillerie royale anglaise, dont il a fait le plus heureux usage en développant la théorie des perpétuants (voir *American Journal of Mathematics*). Il est évident que le même principe peut être appliqué aux invariants de toute espèce, de sorte que, grâce à la belle découverte de M. Mac-Mahon, avec la généralisation (qui en sort presque intuitivement) que j'ai donnée, on est aujourd'hui en état de traiter les parties les plus difficiles et les plus essentielles de la théorie des formes algébriques, comme M. Schubert l'a fait avec sa *Zahl-Geometrie* pour les figures dans l'espace, en faisant abstraction, pour ainsi dire, de toute question de substance (de matière contenue dans les formes), et en se bornant à un calcul purement arithmétique.

Je dois avertir que le théorème de correspondance, tel que M. Mac-Mahon l'a donné, a paru dans l'*American Journal of Mathematics* (Vol. VI. p. 131). M. Mac-Mahon affirme (mais sans aucune preuve) que, si ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant des nombres entiers plus grands chacun que l'unité) ϕ est de la forme $\Sigma r^\alpha s^\beta t^\gamma, \ldots$, où $r, s, t, \ldots$ sont les racines de l'équation

$$\left(a_0, a_1, \frac{a_2}{1\,.\,2}, \frac{a_3}{1\,.\,2\,.\,3}, \ldots\right)(x, 1)^n = 0,$$

alors $$(a_0\delta_{a_1} + a_1\delta_{a_2} + a_2\delta_{a_3} + \ldots)\,\phi = 0,$$

et il donne à ϕ le nom de *fonction symétrique non unitaire* des racines. Ce théorème est vrai seulement pour le cas où n est infini (ce que M. Mac-

Mahon a oublié de dire), et dans ce cas il conduit à la conséquence que les *différentiants* (c'est-à-dire les sous-invariants) de

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, 1)^\infty$$

sont des *fonctions symétriques non unitaires* des racines de l'équation

$$a_0 + a_1 x^{-1} + \frac{a_2}{1.2} x^{-2} + \frac{a_3}{1.2.3} x^{-3} + \ldots = 0$$

et *vice versâ.* Or il est évident que chaque fonction *symétrique non unitaire* d'un nombre *infini* de quantités n'est autre chose qu'une fonction des sommes de toutes les puissances de ces quantités au delà de la première. Voilà pourquoi j'ai attribué à M. Mac-Mahon, dans ce qui précède (pour le cas d'une équation dont le degré est infini), la connaissance du théorème que j'ai démontré dans toute sa généralité.