20.

SUR LA SOLUTION D'UNE CLASSE TRÈS ÉTENDUE D'ÉQUATIONS EN QUATERNIONS.

[*Comptes Rendus*, XCVIII. (1884), pp. 651, 652.]

L'ÉQUATION parfaitement générale du deuxième degré en quaternions sera de la forme

$$\Sigma\,(axbxc + dxe) + f = 0$$

et admettra seize solutions, qu'on pourrait obtenir d'une manière directe au moyen de quatre équations, chacune du deuxième degré, contenant les quatre éléments de x comme inconnus. De même, l'équation en quaternions ou en matrices du deuxième ordre du degré ω admettra ω^4 solutions. Parmi ces formes générales, on peut distinguer celles dans lesquelles tous les quaternions donnés se trouvent du même côté du quaternion cherché, par exemple $ax^2 + bx + c = 0$. On peut nommer de telles équations *équations unilatérales.* Hamilton a considéré le seul cas de l'équation quadratique (voir *Lectures on Quaternions,* art. 636, pp. 631—2), et a déterminé le nombre (6) des racines.

Or, je trouve que ma méthode générale de traiter les matrices amène directement à la solution d'une équation unilatérale d'un ordre quelconque ω (c'est-à-dire la fait dépendre de la solution d'une équation algébrique ordinaire) et donne sans la moindre difficulté et sans aucun effort d'invention le nombre des racines. Ce nombre est exprimé par la fonction $\omega^3 - \omega^2 + \omega$, de sorte que le nombre des racines, pour ainsi dire évanouies par suite de l'unilatéralisme de la forme, est $\omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega$, c'est-à-dire $(\omega^2 - \omega)(\omega^2 + 1)$. On comprend bien qu'en certains cas le nombre des racines subit une réduction ; par exemple, le nombre des racines de $x^\omega + l = 0$ est ω^2 et celui de $x^\omega + kx + l = 0$ est $2\omega^2 - \omega$. Il semble que le nombre, pour l'équation

$$x^\omega + p_\theta x^\theta + p_{\theta-1}x^{\theta-1} + \ldots + p_0 = 0,$$

doit être $(\theta + 1)\,\omega^2 - \theta\omega$, lequel, quand $\theta = \omega - 1$, devient le nombre général $\omega^3 - \omega^2 + \omega$. Les détails de ce petit travail seront donnés dans un prochain numéro du *London and Edinburgh Philosophical Magazine.*