

Etude des schemas thermomecaniques a memoire discrete Probleme aux limites en grandes deformations elastoplastiques

P. PEGON (ISPRA) et P. GUELIN (GRENOBLE)

ON EXPOSE une méthode de formulation des problèmes aux limites en vitesse dans des axes matériels entraînés par la transformation. On indique ensuite une méthode de résolution numérique associée à cette formulation. Des solutions sont commentées dans un cas complexe présentant de la localisation.

Przedstawiono metodę formułowania zagadnień brzegowych w prędkościach w układzie materialnych współrzędnych konwekcyjnych. Podano następnie metodę numeryczną związaną z powyższym sformułowaniem. Przeprowadzono analizę rozwiązań dla przypadku złożonego, przedstawiającego lokalizację.

Представлен метод формулирования краевых задач в скоростях в системе материальных конвекционных координат. Затем приведен численный метод, связанный с вышеупомянутой формулировкой. Проведен анализ решений для сложного случая, представляющего локализацию.

Introduction

LE BUT DE CET article est de donner les bases d'une méthode de résolution des problèmes aux limites en grandes déformations. Cette méthode est compatible avec la démarche de VAN DANTZIG en électromagnétisme ([1], 1934) récemment reprise en mécanique par les auteurs (GUELIN [2], 1983, PEGON [3], 1983) et qui exige la mise en oeuvre des concepts de la géométrie différentielle. En conséquence le but poursuivi ici équivaut à montrer que, contrairement à des opinions parfois affichées, l'usage de la géométrie différentielle n'est pas un obstacle au développement de schémas numériques.

Pour rester dans un cadre didactique, le sujet de l'étude numérique est limité à la simulation des évolutions quasistatiques isothermes d'un corps plan homéomorphe à un carré, muni d'une loi de comportement en simple charge. Cette loi permet de schématiser un comportement „élastoplastique”, c.à.d. la transition continue entre un comportement élastique tangent et un comportement parfaitement plastique lorsque la déformation devient infinie. Etant limité à la simple charge, le formalisme est de genre hypoélastique. On notera, que le problème bidimensionnel considéré ici n'est pas obtenu par dégénérescence d'un cas tridimensionnel particulier (contrainte plane, déformation plane, problème axisymétrique), le corps est plan et évolue dans un plan. En conséquence l'étude ne comporte aucun caractère spécifique a priori susceptible de réduire sa capacité heuristique en matière de développements tridimensionnels.

L'approche numérique, purement lagrangienne, est cinématique: on détermine le champ de vitesses à l'aide d'une forme faible associée aux équations du mouvement dé-

rivées par rapport au temps (équations en vitesse). Les discrétisations spatiales et temporelles ont été effectuées avec un soin particulier. Deux méthodes présentant au sens théorique les mêmes qualités d'interpolation ont été utilisées pour l'approximation spatiale des fonctions cinématiques inconnues définies sur la carte carrée des coordonnées matérielles: une méthode C_1 classique d'éléments finis de type Hermite et une méthode C_2 à l'aide de fonctions splines. L'intégration du système d'équations non linéaires ainsi obtenu s'effectue grâce à une méthode de Runge Kutta d'ordre 4, une partie de ce système permettant l'obtention de l'état de contrainte aux points d'intégration spatiale. Signalons que l'intégration de la loi dans les axes entraînés permet de dissocier clairement les problèmes d'objectivité (intégration dans les axes entraînés) et les problèmes de rotation (calcul des vecteurs de bases des axes entraînés).

Après quelques rappels de géométrie différentielle spécialement utiles pour étudier un univers plan (§ 1), on indique le processus permettant l'écriture du problème aux limites en vitesse (§ 2). Le paragraphe suivant est consacré aux méthodes de discrétisation et de résolution du problème aux limites, mis préalablement sous forme faible (§ 3). Les résultats présentés sont relatifs à la compression d'un carré élastoplastique fretté (§ 4).

1. Surface, courbe, théorème de la divergence et effort dans E_2

On considère un corps plan Ω de frontière régulière. Le marquage des points matériels de Ω s'effectue à l'aide d'une carte \mathcal{C} (Ω) de coordonnées matérielles x^1, x^2 . On associe à l'univers plan dans lequel Ω évolue, un repère fixe euclidien $(0, e_1, e_2)$.

Si l'introduction des grandeurs cinématiques (tenseurs métrique, de déformation, de vitesse de déformation) peut s'effectuer de la même façon que dans le cas tridimensionnel, l'ensemble des définitions et résultats utilisant la notion de surface doit être réexaminé en utilisant les éléments de géométrie différentielle relatifs aux lignes. ⁽¹⁾

1.1. Vecteur normal à une courbe, élément de longueur

Considérons une courbe matérielle $\partial\mathcal{C}$ du plan, paramétrée par w^1 :

$$x^i = x^i(w^1)$$

un vecteur tangent à cette courbe est donné par:

$$(1.1) \quad \mathbf{A}_1 = \frac{\partial x^i}{\partial w^1} \mathbf{g}_i$$

L'élément de longueur le long de cette courbe est:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = (g_{ij} A_1^i A_1^j) dw^1 dw^1 = h_{11} dw^1 dw^1.$$

Un second vecteur tangent à la courbe, associé à \mathbf{A}_1 est donné par:

$$\mathbf{A}_1 = h_{11} \mathbf{A}^1.$$

On vérifie ainsi

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}^1 = \frac{1}{h_{11}} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = 1,$$

⁽¹⁾ Les notations sont celles de [16].

$h_{11} \mathbf{A}^1 \otimes \mathbf{A}^1$ est alors le tenseur métrique de la courbe matérielle $\partial \mathcal{C}$, de déterminant $h = h_{11}$.

$\mathbf{N} = N^i \mathbf{g}_i = N_i \mathbf{g}^i$ est un vecteur unitaire normal à $\partial \mathcal{C}$ si $A_1^i N_i = 0$ et $g_{ij} N^i N^j = 1$. En munissant \mathbf{N} d'une indicatrice convenable, on peut lui associer le pseudo-vecteur \mathbf{v} défini par :

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i = \varepsilon_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial w^1} \mathbf{g}^i$$

où $\varepsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ est l'alternateur relatif de poids -1 dont les composantes sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i = 1, \quad j = 2, \\ -1 & \text{si } i = 2, \quad j = 1. \end{cases}$$

On montre en effet facilement que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_1 = 0$ et $\mathbf{v} = v \mathbf{N}$ avec $v = \sqrt{h}/\sqrt{g}$.

Signalons enfin qu'avec une telle définition, l'orientation de \mathbf{v} par rapport à \mathbf{A}_1 est toujours la même.

Notons dl l'élément de longueur de la courbe matérielle :

$$dl = \sqrt{h} dw^1$$

auquel on associe le vecteur

$$dl_i \mathbf{g}^i = N_i \sqrt{h} \mathbf{g}^i dw^1 = N_i dl \mathbf{g}^i.$$

Si $d\mathcal{L}_i \mathbf{g}^i$ est un vecteur relatif de poids -1 , associé à $dl_i \mathbf{g}^i$, $d\mathcal{L}_i \bar{\mathbf{g}}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} dl_i \bar{\mathbf{g}}^i$, on a :

$$d\mathcal{L}_i = v_i \frac{dl}{\sqrt{h}} = v_i dw^1.$$

Ainsi si \mathbf{B} est un vecteur absolu et \mathcal{B} le vecteur relatif de poids 1 qui lui est associé, on a :

$$(1.3) \quad \mathbf{B}^i dl_i = B^i N_i \sqrt{h} dw^1 = \mathcal{B}^i v_i dw^1 = \mathcal{B}^i d\mathcal{L}_i.$$

On convient enfin que, chaque fois que \mathbf{v} est implicitement associé à une courbe $\partial \mathcal{C}$ fermée, le paramétrage de $\partial \mathcal{C}$ est tel que \mathbf{v} lui soit extérieur.

1.2. Théorème de la divergence

Soit $\mathcal{C}(\Omega)$ une carte des points matériels de Ω , de frontière $\partial \mathcal{C}$. Si \mathcal{B} est un vecteur relatif de poids 1 on a

$$(1.4) \quad \int_{\mathcal{C}} \nabla_i \mathcal{B}^i dx^1 dx^2 = \int_{\partial \mathcal{C}} \mathcal{B}^i v_i dw^1.$$

1.3. Définition des efforts

L'état de contrainte actuel (à l'instant t) en un point matériel M de Ω est décrit par le tenseur relatif de poids 1 de Cauchy

$$(1.5) \quad \sigma(M, t) = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

auquel on associe un tenseur absolu $s(M, t)$.

Sur la frontière $\delta\mathcal{G}(\Omega)$ du milieu bidimensionnel on a :

$$(1.6) \quad f_{\text{ext}}^i \mathbf{g}_i dl = \frac{\nu_j}{\sqrt{h}} \sigma^{ji} \mathbf{g}_i dl (= N_j s^{ji} \mathbf{g}_i dl)$$

où \mathbf{f}_{ext} est le vecteur force extérieure par unité de longueur.

2. Ecriture du problème aux limites en vitesse

L'écriture des problèmes aux limites en vitesse est une pratique relativement courante en grande déformation (cf. SIDOROF [4], 1981). On peut ainsi insérer directement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement dérivées par rapport au temps l'expression de la loi de comportement. Ce processus ne nécessite aucune approximation ou hypothèse supplémentaire, contrairement aux méthodes de formulation incrémentale. Le problème de l'intégration temporelle devient ainsi purement numérique, sans interférer avec les principes de la mécanique.

Le fait que, dans ce cas, à tout instant, l'inconnue du problème soit le champ de vitesse, présente un autre intérêt dans le cas de notre approche: contrairement au champ de déplacement, le champ des vitesses est un champ de vecteur dans les bases entraînés (BRILLOUIN [5], 1949).

2.1. Loi de comportement

Le comportement lors d'un changement monotone est défini par un formalisme analogue à celui des schémas syndéomiques proposés par l'un des auteurs [2]. Comme on se limite à une simple charge, ce formalisme est de type hypoélastique.

On pose

$$(2.1) \quad J_v \sigma = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_v^i \cdot \sigma + \mathcal{L}_v^i \cdot \sigma) = \lambda \zeta \mathcal{G} + 2\mu D + a_2 \bar{\phi} \bar{\sigma}$$

où \mathcal{G} est le tenseur métrique; ζ est le premier invariant de D : D^i_i ; $\bar{\phi}$ est l'invariant relatif de poids 1 $\bar{\sigma}^i_j \bar{D}^j_i$ construit à partir du déviateur des contraintes $\bar{\sigma}$ et du déviateur \bar{D} ; λ et μ sont des scalaires relatifs $\lambda = \sqrt{g} \bar{\lambda}$ et $\mu = \sqrt{g} \bar{\mu}$ où $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ sont les paramètres de Lamé pour un milieu homogène; a_2 est un scalaire relatif $a_2 = -\frac{\mu}{(\sqrt{g} \bar{s})^2}$ où \bar{s} est une contrainte limite en cisaillement pur.

La loi se découple en:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{J}_\sigma &= (2\lambda + 2\mu) \zeta \quad \left(\dot{J} = \frac{\partial I_\sigma}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma^i_i)}{\partial t} \right), \\ J_v \bar{\sigma} &= 2\mu \bar{D} + a_2 \bar{\phi} \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

si bien que la puissance des efforts intérieurs:

$$- \int_{\mathcal{G}(\Omega)} \sigma^i_j D^j_i dx^1 dx^2$$

se scinde en deux contributions découplées

$$(2.3) \quad - \int_{\mathcal{C}(\Omega)} \frac{1}{2} I_\sigma \zeta dx^1 dx^2 - \int_{\mathcal{C}(\Omega)} \bar{\phi} dx^1 dx^2.$$

Pour le choix des paramètres constitutifs effectué pour les applications ($\lambda^\infty = 2\mu^\infty = 1,65 \cdot 10^{11}$ Pa, $s^\infty = 3,18 \cdot 10^8$ Pa) signalons que la partie déviatoire de la loi est fortement non linéaire comme on peut le constater sur le résultat relatif au cisaillement isovolume (Fig. 1). Dans $(M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$ l'expression de la loi est donnée par

$$(2.4) \quad \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} = \lambda g_{\dot{a}i}^{im} D_{im} g^{ij} + 2\mu g^{ij} g^{jm} D_{im} + a_2 (\bar{\sigma}^{im} D_{im}) \bar{\sigma}^{ij} - (\sigma^{il} g^{jm} + \sigma^{jl} g^{im}) D_{lm} = B^{ijlm} D_{lm}.$$

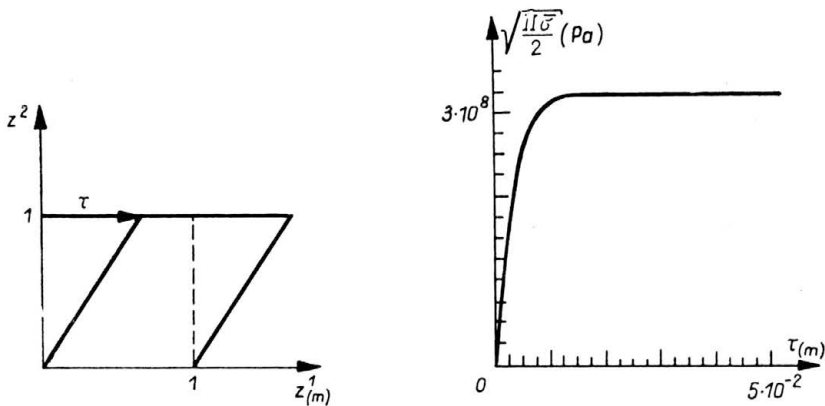


FIG. 1. Evolution du second invariant du déviateur des contraintes $\sqrt{II_{\bar{\sigma}}}/2$ durant le test de cisaillement.

2.2. Conservation de la quantité de mouvement, équations en vitesse

Les évolutions de Ω étant supposées quasistatiques, les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (\rho \sqrt{g} F^i + \nabla_j \sigma^{ji}) \mathbf{g}_i &= \mathbf{0}, \\ \sigma^{ij} &= \sigma^{ji} \end{aligned}$$

où \mathbf{F} est le vecteur force extérieure par unité de masse et ρ la masse surfacique.

Si les équations (2.5) sont vérifiées à l'instant initial, la conservation de la quantité de mouvement sera encore vérifiée lorsque les dérivées temporelles de (2.5) seront nulles, soit :

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sqrt{g} F^i + \nabla_j \sigma^{ji}) \mathbf{g}_i = \mathbf{0},$$

$$(2.7) \quad \mathcal{L}_{\dot{v}} \sigma^{ij} = \mathcal{L}_{\dot{v}} \sigma^{ji},$$

$\rho \sqrt{g}$ étant constant d'après la conservation de la masse, et comme $\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t} = \nabla_i v^k \mathbf{g}_k$, (2.6) s'écrit selon :

$$(2.8) \quad (\varrho \sqrt{g}(\mathcal{L}_v \cdot F^i + F^k \nabla_k F^i) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_j \sigma^{ji}) + \nabla_j \sigma^{jk} \nabla_k v^i) \mathbf{g}_i = 0.$$

On obtient:

$$\varrho \sqrt{g}(\mathcal{L}_v \cdot F^i + F^k \nabla_k v^i) + \nabla_j \mathcal{L}_v \cdot \sigma^{ji} + \sigma^{jl} \nabla_l \nabla_j v^i + \nabla_j \sigma^{jl} \nabla_i v^i = 0$$

et en groupant les deux derniers termes

$$(2.9) \quad \varrho \sqrt{g}(\mathcal{L}_v \cdot F^i + F^k \nabla_k v^i) + \nabla_j (\mathcal{L}_v \cdot \sigma^{ji} + \sigma^{jl} \nabla_l v^i) = 0.$$

Ce résultat amène deux commentaires:

i) Le fait d'avoir conservé les deux termes $F^k \nabla_k v^i$ et $\nabla_j \sigma^{jk} \nabla_k v^i$ qui s'annulent du fait des équations d'équilibre (usage d'une dérivée totale) permet d'obtenir une équation (2.9) bien adaptée à l'utilisation du théorème de la divergence.

ii) Le terme $\sigma^{jl} \nabla_l v^i$ conduit à des ruptures de symétrie.

2.3. Conditions aux limites, conditions aux limites en vitesse

Soient $\partial \mathcal{C}_u(t)$ et $\partial \mathcal{C}_\sigma(t)$ les frontières matérielles de Ω respectivement soumises à un déplacement $\bar{u}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ et à une force par unité de longueur f_{ext} . On a $\partial \mathcal{C}_u(t) \cup \partial \mathcal{C}_\sigma(t) = \partial \mathcal{C}(\Omega)$. La séparation entre $\partial \mathcal{C}_u$ et $\partial \mathcal{C}_\sigma$ est introduite pour la clarté de l'exposé. On peut en effet considérer des cas mixtes où l'on impose une force et une composante du déplacement. Sur $\partial \mathcal{C}_u$ on peut imposer indifféremment un déplacement ou une vitesse de déplacement, à condition de connaître les conditions initiales en déplacement ainsi que $\partial \mathcal{C}_u(t)$.

La condition en déplacement qui s'écrivait:

$$(2.10) \quad \text{pour } \mathbf{x}^i \in \partial \mathcal{C}_u(t): \mathbf{g} U^\alpha \mathbf{e}_\alpha = U^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

devient:

$$(2.11) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial \mathcal{C}_u(t): \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}.$$

La différence de notations entre (2.10) et (2.11) rappelle le fait que, contrairement au déplacement, le vecteur vitesse a un sens vectoriel dans les champs de repères entraînés,

En ce qui concerne $\partial \mathcal{C}_\sigma$, l'équilibre à la frontière s'écrit:

$$(2.12) \quad \mathbf{x}_i \in \partial \mathcal{C}_\sigma(t): \frac{\nu_j}{\sqrt{h}} \sigma^{ji} \mathbf{g}_i = f_{\text{ext}}^i \mathbf{g}_i.$$

Si l'on prend la dérivée matérielle de cette expression, et si l'on connaît l'état initial ainsi que $\partial \mathcal{C}_\sigma(t)$, on obtient une équation équivalente en vitesse.

Dans les situations particulières envisagées ultérieurement la force \mathbf{f}_{ext} au point matériel M de $\partial \mathcal{C}_\sigma(t)$ se déduira

i) soit de la donnée du scalaire absolu de pression extérieure p . Dans ce cas:

$$(2.13) \quad \mathbf{f}_{\text{ext}} = p\mathbf{N} = p \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{h}} \nu_j g^{ji} \mathbf{g}_i;$$

ii) soit de la donnée d'un facteur absolu de cisaillement τ . Si \mathbf{T} est la tangente unitaire associée à \mathbf{A}_1 alors: $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \tau \mathbf{T}$ dont on déduit:

$$(2.14) \quad \mathbf{f}_{\text{ext}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \tau A_1^i \mathbf{g}_i.$$

Dans le premier cas l'équation (2.12) a pour expression:

$$x^i \in \partial \mathcal{C}_\sigma(t): \nu_j(\sigma^{jj} - p \sqrt{g} g^{ji}) \mathbf{g}_i = 0$$

dont la dérivée temporelle s'écrit:

$$x^i \in \partial \mathcal{C}_\sigma(t)$$

$$(2.15) \quad \nu_j(\mathcal{L}_{\dot{v}} \cdot \sigma^{ji} + \sigma^{jk} \nabla_k v^i) \mathbf{g}_i = \sqrt{g} \nu_j \left(\frac{\partial p}{\partial t} g^{ji} + p g^{mn} \nabla_n v_m g^{ji} - p g^{ki} g^{lj} \nabla_k v_l \right) \mathbf{g}_i$$

et dans le second cas:

$$(2.16) \quad \nu_j(\mathcal{L}_{\dot{v}} \cdot \sigma^{ji} + \sigma^{jk} \nabla_k v^i) \mathbf{g}_i = \left(A_1^i \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau A_1^i g^{im} \nabla_i v_m \right) \mathbf{g}_i.$$

2.4. Problème aux limites, problème aux limites en vitesse

Le problème aux limites s'énonce ainsi:

On cherche le champ de déplacement U défini dans $(0, e_\alpha)$ sur $\mathcal{C}(\Omega) \times]0, t_f]$, tel que, pour tout $(x^i, t) \in \mathcal{C}(\Omega) \times]0, t_f]$, soient vérifiées

i) la conservation de la masse: $\rho \sqrt{g} = \text{constante}$,

ii) la conservation de la quantité de mouvement: $\begin{cases} \rho \sqrt{g} F^i + \nabla_j \sigma^{ji} = 0, \\ \sigma^{ij} = \sigma^{ji}; \end{cases}$

iii) les conditions aux limites: $x^i \in \partial \mathcal{C}_u, U^\alpha = \bar{U}^\alpha$,

$$x^i \in \partial \mathcal{C}_\sigma, \nu_j(\sigma^{ji} - p \sqrt{g} g^{ji}) \mathbf{g}_i = 0$$

ou $(\nu_j \sigma^{ji} - \tau A_1^i) \mathbf{g}_i = 0$;

iv) la définition implicite de σ par la loi de comportement

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} = B^{ijlm} D_{lm}.$$

La formulation du problème en vitesse s'obtient alors, de façon équivalente par:

la configuration initiale étant d'équilibre, on cherche dans les axes entraînés la solution d'un problème en V que l'on projette et intègre dans les axes fixes de façon à obtenir $U^\alpha e_\alpha$ défini sur $\mathcal{C}(\Omega) \times]0, t_f]$ et vérifiant:

i) $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \sqrt{g}) = 0$;

ii) $\rho \sqrt{g}(\mathcal{L}_{\dot{v}} F^i + F^k \nabla_k v^i) + \nabla_j(\mathcal{L}_{\dot{v}} \sigma^{ji} + \sigma^{jl} \nabla_l v^i) = 0$,

$\mathcal{L}_{\dot{v}} \sigma^{ij} = \mathcal{L}_{\dot{v}} \sigma^{ji}$;

iii) $x^i \in \partial \mathcal{C}_u: \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$,

$$x^i \in \partial \mathcal{C}^\sigma: \nu_j(\mathcal{L}_{\dot{v}} \sigma^{ji} + \sigma^{jl} \nabla_l v^i) = \sqrt{g} \nu_j \left[\frac{\partial p}{\partial t} g^{ji} + p(g^{ml} g^{ji} - g^{li} g^{mj}) \nabla_l v_m \right]$$

ou $= A_1^i \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau A_1^i g^{im} \nabla_i v_m$;

iv) $L_{\dot{v}} \sigma^{ij} = B^{ijlm} D_{lm}$ dans $(M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$.

3. Traitement numérique du problème aux limites

Le système d'équations aux dérivées partielles constituant le problème aux limites en vitesse (PLV) est mis sous forme intégrale faible (FIF) équivalente. Ce processus permet une prise en compte des conditions aux limites en force directement au sein du formalisme.

Plutôt que d'étudier des domaines matériels complexes avec une approximation C_0 , nous avons préféré mettre en oeuvre sur un domaine simple deux approximations respectivement C_1 et C_2 . Ces approximations sont générées sur une carte $\mathcal{C}(\Omega)$ carrée par produit tensoriel. Un tel domaine aussi restreint, permet cependant, par homéomorphisme, de décrire des domaines physiques variés, comme par exemple des rectangles ou des couronnes dont les équivalents tridimensionnels — cube, tube, coque sphérique — sont d'un intérêt considérable.

Du fait de la forme simple des conditions aux limites que l'on imposera dans les applications ($\partial\mathcal{C}_u$ et $\partial\mathcal{C}_\sigma$ indépendants du temps), la forme faible, discrétisée spatialement, conduit à un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires. L'intégration est réalisée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Le choix d'une telle méthode est surtout dû à sa commodité de mise en oeuvre plutôt qu'à des critères de coût. Notons qu'elle a déjà été utilisée de façon intensive dans des cas quasistatiques en grandes déformations (voir REED, ATLURI [6], 1983).

3.1. Traitement spatial

a. Formulation faible du problème aux limites en vitesse. La configuration initiale étant d'équilibre, on cherche

$$U^\alpha(t, \mathbf{x}^i) \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \int_0^t V^\alpha(\tau, \mathbf{x}^i) d\tau$$

défini sur $\mathcal{C}(\Omega) \times]0, t_f]$ tel que soient vérifiées à tout instant, quel que soit \mathbf{V} cinématiquement admissible ($\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$ sur $\partial C_u(t)$):

$$(3.1) \quad 0 = - \int_{\mathcal{C}(\Omega)} \rho \sqrt{g} \left(\frac{\partial F^i}{\partial t} + F^i \nabla_k v^k \right) \hat{v}_i dx^1 dx^2 + \int_{\mathcal{C}(\Omega)} (\mathcal{L}_{\hat{v}} \sigma^{ji} + \sigma^{jk} \nabla_k v^i) \nabla_j \hat{v}_i dx^1 dx^2 - \int_{\partial\mathcal{C}_\sigma(\Omega)} \left(\frac{\partial(\sqrt{h} f_{ext}^i)}{\partial t} + \sqrt{h} f_{ext}^k \nabla_k v^i \right) \hat{v}_i dw^1$$

avec

$$\frac{\partial \rho \sqrt{g}}{\partial t} = 0; \quad \mathcal{L}_{\hat{v}} \sigma^{ji} = \mathcal{L}_{\hat{v}} \sigma^{ij} = B^{ijml} D_{lm} \quad \text{dans} \quad (M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$$

et pour

$$\mathbf{x}^i \in \partial\mathcal{C}_u(t) \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, \\ \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

b. Choix des inconnues du problème et conséquences. Les fonctions cinématiques inconnues, dont le processus numérique fournira une approximation sont:

$$V^\alpha(\mathbf{x}^i, t) \quad \alpha \in \langle 1, 2 \rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

Le vecteur déplacement est obtenu directement par intégration sous la forme:

$$U(x^i, t) = U^\alpha e_\alpha = \left(\int_0^t V^\alpha dt \right) e_\alpha + U_0^\alpha e_\alpha,$$

où

$$U(x^i, 0) = U_0^\alpha e_\alpha.$$

Le champ virtuel subit les mêmes conditions de repéage:

En conséquence, on peut écrire l'équation intégrale (3.1) sous une forme symbolique (faisant apparaître les fonctions inconnues):

$$(3.2) \quad I(t, U^\alpha(x^i, t), V^\beta(x^i, t), \hat{V}^\gamma(x^i, t)) = J(t, U^\alpha, V^1, V^2, \hat{V}^1, \hat{V}^2) + K(t, U^\alpha, \hat{V}^1, \hat{V}^2)$$

où J, K (et I) sont linéaires en \hat{V}^γ , non-linéaires en U^α et dépendants du temps, et où J est linéaire en V^β .

c. **Approximation spatiale de l'inconnue $V = V^\alpha e_\alpha$.** Le domaine de définition de la carte $\mathcal{C}(\Omega)$ est restreint au carré $[0,1] \times [0,1]$. En l'absence de critère de choix clairement défini (STRANG, FIX [7], 1973), les bases des fonctions d'approximation spatiale sont choisies à support rectangulaire. On peut ainsi construire des approximations bidimensionnelles par produit tensoriel d'approximations unidimensionnelles.

L'approximation C_1 est de type Hermite et l'approximation C_2 de type spline (BOGNER, FOX, SCHMIT [8], 1965 et SCHUMAKER [9], 1981). et DE BOOR [10], 1978). On note ces deux approximations par:

$$(3.3) \quad V_a = \left(\sum_{m=1}^k V_m^\alpha E_m(x^1, x^2) \right) e_\alpha.$$

d. **Equations du mouvement discrétisées spatialement.** On suppose que \hat{V}_a appartient au même espace que V_a , ainsi:

$$(3.4) \quad \hat{V}_a = \left(\sum_{m=1}^k V_m^\alpha E_m \right) e_\alpha.$$

La linéarité de I en \hat{V} , ainsi que celle de J en V permettent de réécrire (3.2) sous une forme approchée.

Si l'on range V_m^α et \hat{V}_m^α dans des tableaux $[V_p]$ et $[\hat{V}_p]$, $1 \leq p \leq 2k$ l'écriture matricielle de cette forme approchée est:

$$(3.5) \quad {}^t[\hat{V}_n]([J_{nm}][V_m] + [K_n]) = 0$$

où $[J_{nm}]$ n'est pas une matrice symétrique.

Dans des situations complexes, du fait des conditions aux limites en vitesse, l'écriture de (3.5) sous la forme:

$$(3.6) \quad [J_{nm}][V_m] + [K_n] = 0$$

peut porter à confusion. En effet si $\partial \mathcal{C}_u$ varie au cours du temps, non seulement les indices n des équations (3.6) qui n'ont pas à être vérifiées, du fait de la nullité de \hat{V}_n , varient

également mais encore des relations linéaires dépendantes du temps entre les \hat{V}_n peuvent apparaître (cas des splines). Les situations abordées ultérieurement dans cette étude portant sur des cas où $\partial \mathcal{C}_u(t)$ reste constant, l'écriture (3.6) est cependant conservée.

Par inversion du système (3.6) et en notant que $[V_m] = \frac{[dU_m]}{dt}$ on obtient finalement le système d'équations différentielles ordinaires

$$(3.7) \quad \left[\frac{dU_m}{dt} \right] = [J_{mn}^{-1}] [K_n] = [L_n].$$

e. Obtention pratique des équations discrétisées, système d'équations complet. L'intégration spatiale conduisant à l'obtention de $[J_{mn}]$ et $[K_n]$ est réalisée à l'aide d'une quadrature „produit” de Gauss Hermite, cette méthode a été préférée à des méthodes directes moins coûteuses, pour ses commodités algorithmiques. La connaissance des composantes σ^{ij} de σ dans $(M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$ est requise en ces points d'intégration. C'est pour cela qu'il faut adjoindre au système (3.7) le système d'équations additionnelles

$$(3.8) \quad \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} \text{ point d'intégration} = [B^{ijkl} D_{kl}] \text{ point d'intégration}$$

qui permet d'obtenir le système d'équations complet.

La matrice $[J_{mn}]$ n'étant pas a priori symétrique, le système (3.7) doit être obtenu par une résolution directe (méthode de Gauss) à partir de (3.6). Une méthode frontale adaptée d'IRONS ([11], 1970) a été utilisée. Lors de la boucle sur les éléments rectangulaires et de l'assemblage des deux membres de (3.6), on élimine toutes les inconnues V_m au fur et à mesure que les lignes de (3.6) qui leur sont relatives sont complètes. On ne travaille donc qu'avec une partie „active” du système linéaire dont la taille f représente le front d'assemblage.

Si l'on considère un maillage à $k_1 \times k_2$ rectangles de la carte $\mathcal{C}(\Omega)$, en supposant $k_1 \leq k_2$, on obtient pour les deux discrétisations les valeurs d'encombrement (nombre de variables V_m , taille du front d'assemblage f) du tableau 1.

TABLEAU 1. Caractéristique d'encombrement pour trois approximations

Approximation	Nombre d'inconnues	Taille du front
C_0	$2(k_1+1)(k_2+1)$	$2(k_1+2)$
C_1	$8(k_1+1)(k_2+1)$	$8(k_1+2)$
C_2	$2(k_1+3)(k_2+3)$	$6(k_1+3)+8$

A titre indicatif on a également fait figurer dans le tableau les caractéristiques d'une approximation de Lagrange C_0 à 4 noeuds.

3.2. Traitement temporel

Pour intégrer les systèmes d'équations différentielles en U (3.7) et en σ (3.8), deux techniques ont été chronologiquement utilisées:

a. Méthode de résidu pondéré d'ordre 1. Cette méthode, proposée par Zienkiewicz ([12], 1977), consiste à supposer des variations linéaires de $\frac{[du_m]}{dt}$ sur un intervalle $[t, t + \Delta t]$ de discrétisation temporelle. On associe ensuite aux équations (3.7) une forme faible temporelle par une technique de résidu pondéré (pour plus de détails voir [3]). En dehors des problèmes de convergence de l'algorithme de résolution, on peut conclure rapidement sur cette méthode en notant la difficulté du choix du pas Δt ainsi que celle de l'estimation de la convergence temporelle.

b) Méthode de Runge Kutta d'ordre 4. Plutôt que de chercher à associer à un système d'équations différentielles une forme faible, on peut chercher à réaliser l'intégration directement. Pour ce faire, nous avons retenu la méthode classique de Runge-Kutta d'ordre 4 modifiée par Gill (cf. RALSTON, WILF [13], 1960). Les raisons d'un tel choix sont les suivantes:

- i) ordre de la méthode temporelle comparable à l'ordre de la méthode spatiale;
- ii) mise en oeuvre d'un schéma purement explicite;
- iii) facilité du changement de pas Δt ;
- iv) convergence temporelle assurée par le processus même de l'évaluation de l'erreur (calculs sur un pas double).

La méthode utilisée est inhabituelle. Notons que récemment, certains auteurs ont effectué ce type de choix [6].

Trois critères de convergence ont été utilisés: un critère cinématique sur l'évaluation de U , un critère en „force” sur l'évaluation de σ , un critère global en puissance sur l'évaluation de $\int_{\mathcal{V}(\Omega)} \sigma^i_j D^j_i dx^1 dx^2 \cdot C$ est toujours le critère le plus défavorable qui a été activé.

4. Validation et résultats

4.1. Validation

On trouvera dans [3] les divers cas homogènes traités. Dans une seconde étape la validation doit s'effectuer dans un cas non homogène. Dans le cas de la dilatation d'une couronne sous l'effet d'une dépression extérieure, on obtient, en approximation C2, des précisions relatives sur les contraintes qui sont de l'ordre de 10^{-6} avec une discrétisation 10×10 .

4.2. Compression d'un carré fretté

a. Présentation du problème. On considère le problème aux limites de la Fig. 2.

Un carré Ω , parfaitement fretté ($V^1(x^2 = 1) = 0$) est comprimé avec une sollicitation constante (\bar{V}). Du fait des symétries de la sollicitation on suppose que le champ de déplacement est symétrique par rapport aux axes z^1 et z^2 , ce qui permet de ne prendre en compte que le quart du domaine Ω .

b. Problème du coin. Du fait de l'absence de traitement spécifique, la singularité du coin produit un pic de contrainte en $x^2 = 1$ qui se résorbe avec des oscillations (C_1 et C_2)

ou non (C_0 , voir Fig. 3). Le pic est du même ordre de grandeur pour toutes les approximations et augmente avec la densité du maillage.

c. **Quelques remarques numériques sur le phénomène de localisation.** On considère sur la Fig. 4 les configurations obtenues en multipliant par un facteur 100/3 les composantes du champ de déplacement à $t = 0,3$ s, pour les mêmes approximations et maillages que sur la Fig. 3.

i) On observe l'apparition très nette d'une localisation de la déformation selon une bande inclinée à 45° par rapport à la direction de sollicitation. Notons que du fait des conditions aux limites ce problème ne peut être envisagé comme une analyse de bifurcation à partir d'une situation homogène (cf. [14] et [15] par exemple).

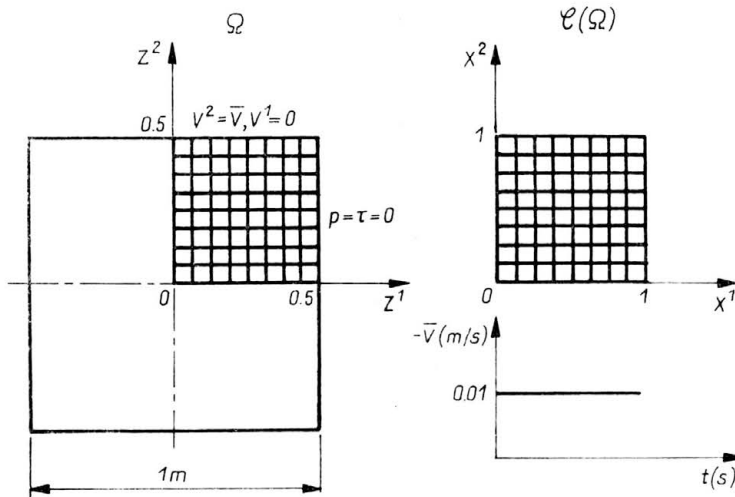


FIG. 2. Géométrie du problème du carré fretté, et mode de sollicitation.

ii) La finesse de la localisation dépend fortement de l'approximation et du maillage utilisé. En ce qui concerne le maillage, ce résultat n'est pas surprenant puisque aucune dimension caractéristique n'est introduite dans la loi. Ces résultats sont indépendants des sous-intégrations (cf. Annexe), de la forme des mailles et de la présence du coin, mais fortement liés à la plasticité (cf. Fig. 5, 6, 7).

d. **Quelques remarques physiques sur le phénomène de localisation.** La valeur de l'accroissement de section tend vers la valeur de l'enfoncement vertical.

On est donc amené à schématiser les phénomènes observés pour $t > 0,3$ s par deux blocs glissant l'un sur l'autre suivant une ligne inclinée à 45° . Il est possible de préciser et de caractériser les modalités de la transition entre le comportement globalement hétérogène à $t = 0,1$ s et le comportement organisé (bande, blocs) postérieur. Pour cela on analyse (localement) les variations des grandeurs $\left(\frac{1}{2} II_{\Delta \bar{\epsilon}}\right)^{1/2}$, $\text{Ln} \sqrt{g/g_0}$, $\sqrt{II_{\sigma}/2g}$, I_{σ}/\sqrt{g} , $\bar{\phi}$ et $I_{\sigma}\zeta$ notées XE2B, LNG, XS2B, XSSI, XDSB, PR sur la figure 8, relative au point matériel M1($x^1 = 0$, $x^2 = 1$) du bloc supérieur et M0(0, 0) de la bande.

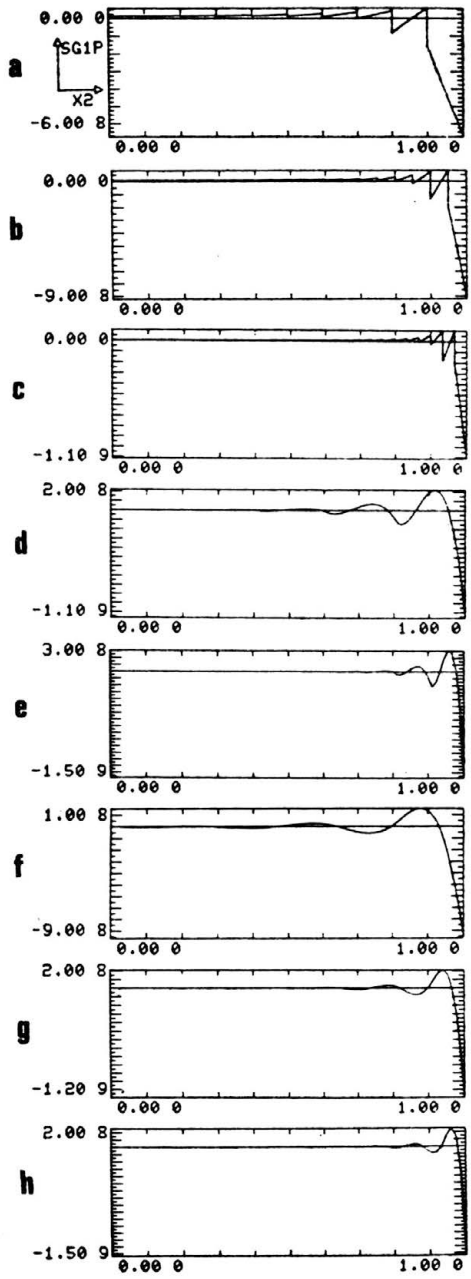
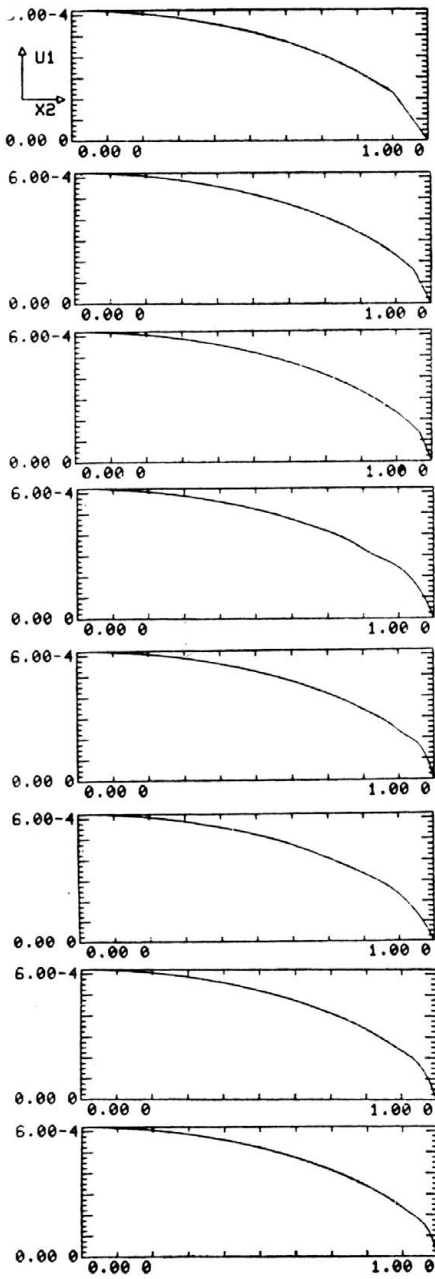


FIG. 3. Profils de déplacement $U^1(U1)$ et de contrainte σ_p^{11} (SG1P) à $t = 0,1$ s le long du côté ($x^1 = 1$, $0 \leq x^2$ ($x2$) ≤ 1) pour diverses approximations et divers maillages: a) C_0 10×10 , b) C_0 20×20 , c) C_0 30×30 , d) C_1 5×5 , e) C_1 10×10 f) C_2 5×5 , g) C_2 10×10 et h) C_2 15×15 .

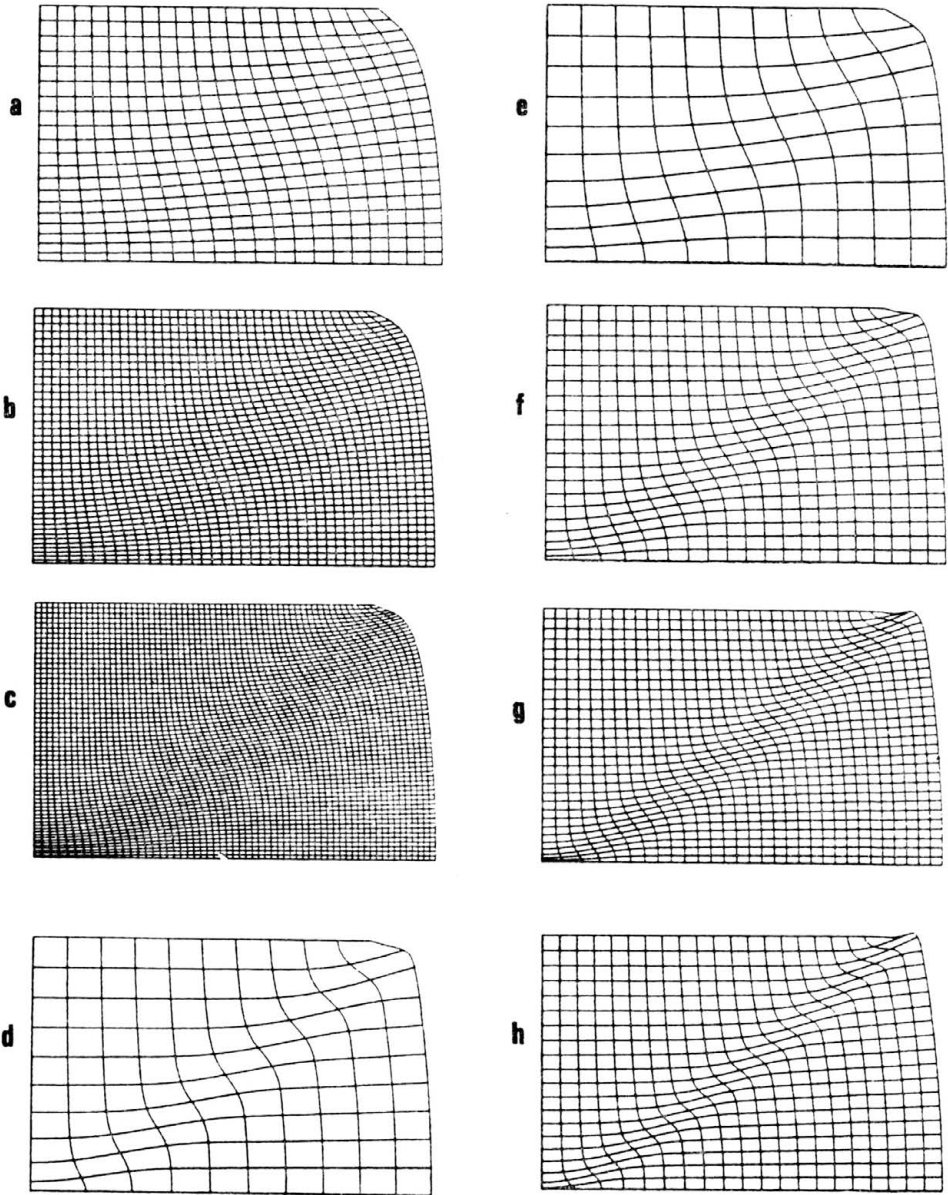


FIG. 4. Configuration à $t = 0,3$ s ($U \times 100/3$) pour diverses approximations et divers maillages: a) C_0 10×10 , b) C_0 20×20 , c) C_0 30×30 , d) C_1 5×5 , e) C_2 5×5 , f) C_2 10×10 , et C_2 15×15 et h) C_1 10×10 .
Chaque maille de calcul est subdivisée en 4 mailles dans cette représentation.

Conclusion

Dans cette étude on a montré sur un cas pratique amalgamant deux phénomènes réputés difficiles (singularité de coin, localisation en bande de la déformation) le caractère opérationnel de la méthode de formulation proposée: des résultats de convergence et

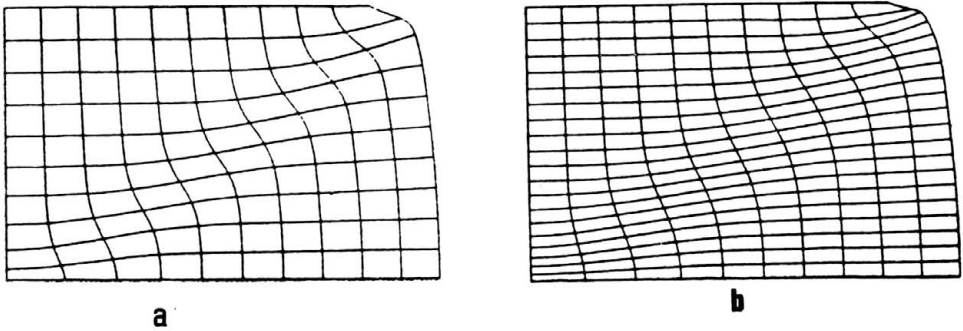


FIG. 5. Configuration à $t = 0,3$ s ($U \times 100/3$) dans le cas C_2 pour 2 maillages: a) 5×5 , b) 5×10 .

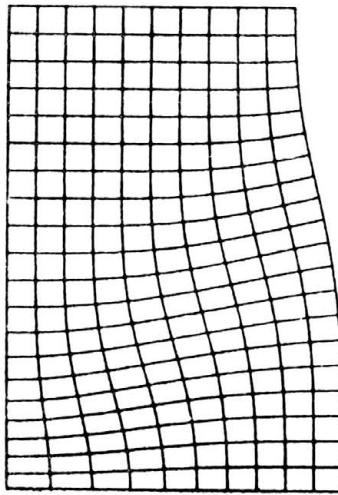


FIG. 6. Configuration à $t = 10$ s d'un rectangle $L = 2l = 2m$ fretté sollicité en $\bar{V}^1 = -0,01$ m/s, pour un maillage 5×10 .

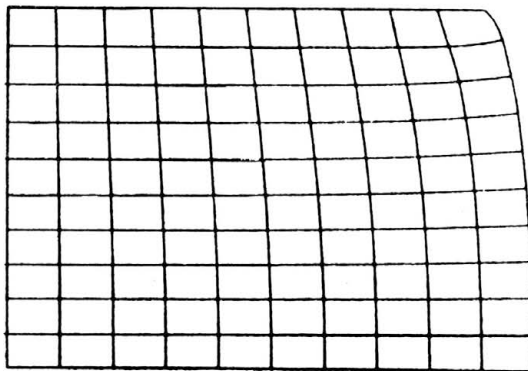


FIG. 7. Configuration à $t = 0,3$ s ($U \times 100/3$) pour un maillage C_1 5×5 dans un cas „élastique” ($a_2 = 0$).

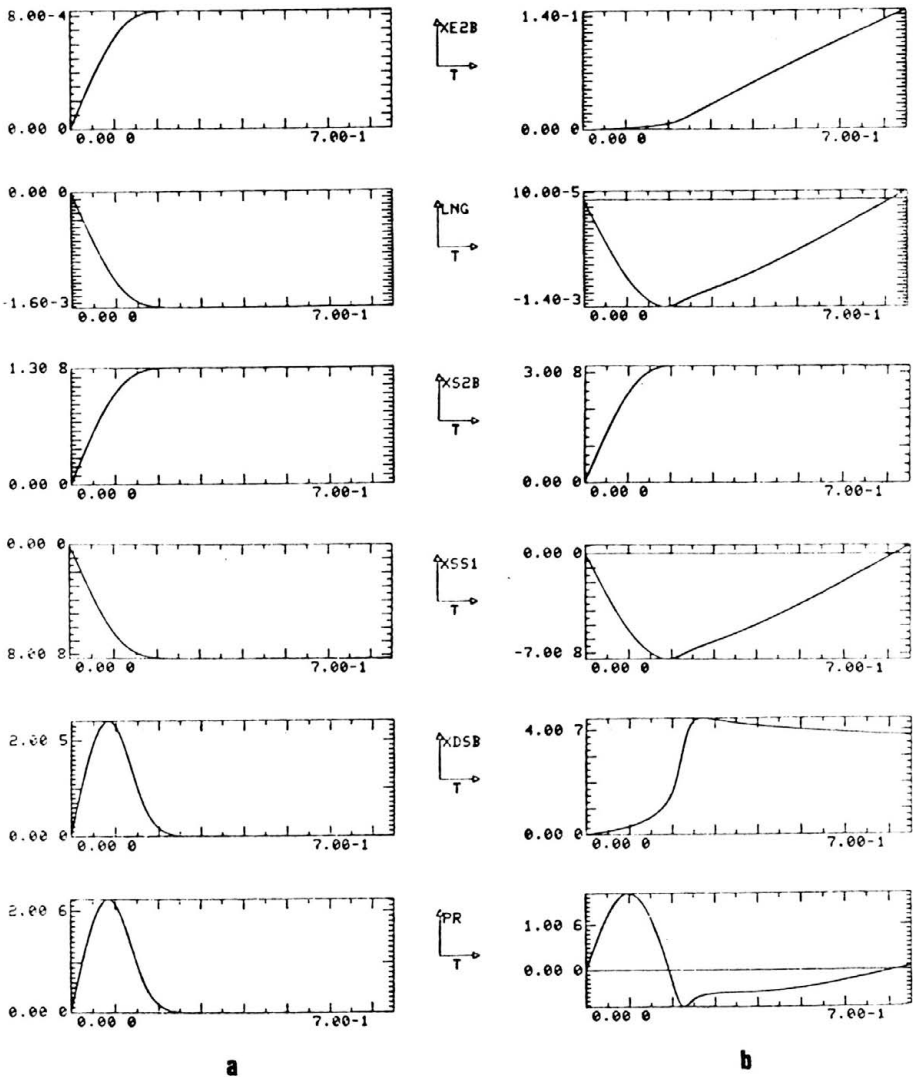


FIG. 8. Variations des variables cinématiques (XE2B, LNG), d'effort (XS2B, XSS1) et thermomécaniques (XDSB, PR) au cours du temps $t(T)$, $0 \leq t \leq 0,75$ s au point M1 (cf. a) et MO (cf. b) pour une discrétisation $C_1 10 \times 10$.

des indications physiques ont été esquissées. L'analyse a également souligné les carences de l'élément de Lagrange à 4 noeuds dans le cas de la localisation.

Il n'en reste pas moins que cette étude n'est qu'une introduction heuristique à l'étude de l'hystérésis élastoplastique en grande déformation dans les problèmes aux limites non homogènes. De même que dans le cadre théorique et expérimental (voir par exemple GUELIN, NOWACKI, PEGON [16] et HAN, WACK [17]) le travail d'exploration reste considérable. Les deux voies d'extension actuellement considérées sont, toujours dans un cadre bidimensionnel, d'une part une analyse quasistatique où l'hystérésis joue un rôle prépondérant, et d'autre part l'étude du cas dynamique.

TABLEAU 2. Indications relatives aux processus numériques et au coût d'exploitation des simulations des évolutions du quart de carré fretté dans le cas où $a_2 \neq 0$

Maillage	Intégration	Précision $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$	Processus numérique						Coût	
			$t = 0$	$t = 0,75$		$t = 2,5$		Bissection maximum	Mémoire (K)	Coût passage FCT (s)
			pas	Bissection	nb de pas	Bissection	nb de pas			
C_0 10×10	2×2	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	1/2	44	1/2	114	0	340	0,913
C_0 20×20	2×2	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	1/2	52	1 2	122	1	924	5,86
C_0 30×30	2×2	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	1-2	58			1	2128	21,11
C_1 5×5	3×3	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	0	74	0	204	1	420	3,36
C_1 10×10	3×3	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	0	88			1	1308	23,4
C_2 5×5	3×3	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	1/2	54	1/2	124	1	324	2,22
C_2 5×10	3×3	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125					1	412	4,39
C_2 10×10	3×3	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	0	74	0	214	1	692	10,5
C_2 15×15	3 3	$1 \cdot 10^{-5}$	0,0125	0	76			1	1348	29,5

[481]

Remerciement

Ce travail a été soutenu financièrement par la Commission des Communautés Européennes par l'intermédiaire d'une bourse de Doctorat d'Etat accordée à l'un des auteurs et par le C.N.R.S. (sous contrat G.R.E.C.O.) et la D.G.R.S.T. (sous contrat G.I.S.).

Annexe. Renseignements techniques sur les simulations dont les résultats sont présentés au Sect. 4.2

1. Processus temporel, coûts

On trouve sur le Tableau 2 des indications sur les processus numériques temporels (taille du pas, nombre de pas, nombre de bisections) ainsi qu'aux coûts d'exploitation (taille, temps) pour les simulations effectuées sur un quart de carré avec $a_2 \neq 0$ sur AMDAHL 470/V8

La méthode frontale a été mise en oeuvre en mémoire centrale, sans recours à des fichiers de stockage auxiliaires.

2. Intégration

Il était important de vérifier que le phénomène de localisation n'était pas en partie lié à des sous-intégrations numériques. On sait en effet que lors du processus de sous-intégration des mécanismes provoquant des oscillations peuvent être excités.

Ce phénomène est très étudié dans le cas de l'élément de Lagrange C_0 à 4 noeuds et 1 point d'intégration (voir par exemple BELYTSCHKO *et coll.* [18], 1984): il est illustré sur la Fig. 9 où l'on peut observer des résultats de calcul avec 1×1 point d'intégration. Notons la finesse du processus de localisation ainsi que la structure particulière des oscillations. Signalons que, dans le cas C_0 , si l'on augmente le nombre de points d'intégration au delà de 2, aucunes différences significatives n'apparaissent.

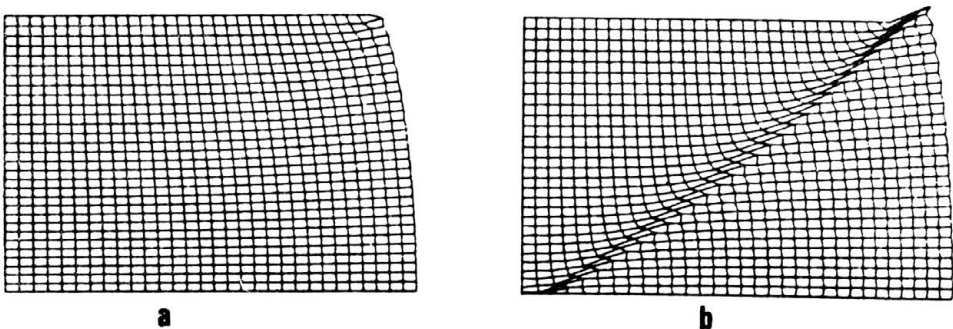


FIG. 9. Deux configurations d'un C_0 30×30 à 1 point d'intégration par maille: a) $t = 0,1$ s ($U \times 100$), b) $t = 0,3$ s ($U \times 100/3$).

Références

1. D. VAN DANZIG, *The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **30**, 421-427, 1934.
2. P. GUÉLIN, *Notes on the Cauchy tensors $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \mathbf{r}_{g_{ij}}$ and $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \mathbf{r}^i \sigma^j$ expressing the discrete memory concept*, The Summer School on Two Phase Medium Mechanics, DEMBICKI Ed., Gdańsk 57-132, 1983.
3. P. PEGON, *Contribution à l'étude de deux classes de problèmes en grandes déformations: flambage dynamique et formulation de problèmes aux limites*, Thèse de Docteur Ingénieur, Grenoble 1983.
4. F. SIDOROFF, *Formulations élasto-plastiques en grandes déformations*, Rapport GRECO no. 29, 1981.
5. L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Chap. X, Ed. MASSON, Paris 1949.
6. K. W. REED, S. N. ATLURI, *Analyses of large quasistatic deformations of inelastic bodies by a new hybrid-stress finite element algorithm*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., **39**, 245-295, 1983.
7. G. STRANG, G. J. FIX, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973.
8. F. K. BOGNER, R. L. FOX, L. A. SCHMIT, in: Proc. of the Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech. Wright Patterson AFB, Ohio 1965.
9. L. L. SCHUMAKER, *Spline functions: basic theory*, J. Wiley and Sons, 1981.
10. C. DE BOOR, *A practical guide to splines*, Applied Mathematical Sciences, 27, Springer Verlag, 1978.
11. B. M. IRONS, *A frontal solution program for finite element analysis*, Int. J. Numer. Meths. Engng., **2**, 5-32, 1970.
12. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, 3rd ed., McGraw Hill, 1977.
13. A. RALSTON, H. S. WILF, *Mathematical methods for digital computer*, Wiley 1960.
14. J. R. RICE, J. N. RUDNICKI, *A note on some features of the theory of localization of deformation*, Int. J. Solids Structures, **16**, 597-605, 1980.
15. R. CHAMBON, J. DESRUE, *Quelques remarques sur le problème de la localisation en bande de cisaillement*, Mech. Res. Comm., **11**, 145-153, 1984.
16. P. GUÉLIN, W. K. NOWACKI, P. PEGON, *Etude des schémas thermomécaniques à mémoire discrète: base physique et formalisme* [dans ce numéro].
17. S. HAN, B. WACK, *Properties of the pure hysteresis behaviour*, Soumis à Arch. Mech.; cf. aussi: *Discrete memory description*, Res Mechanica Letters, 1985.
18. T. BELYTSCHKO, J. S. -J ONG, W. K. LIU, J. M. KENNEDY, *Hourglass control in linear and nonlinear problems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., **43**, 251-276, 1984.

COMMISSION DES COMMUNAUTÉS EUROPÉENNES
 CENTRE COMMUN DE RECHERCHE, ETABLISSEMENT D'ISPRA, ISPRA, ITALIE
 and
 I.M.G., GRENOBLE, FRANCE.

Received November 27, 1984.