18.

SUR LES QUANTITÉS FORMANT UN GROUPE DE NONIONS ANALOGUES AUX QUATERNIONS DE HAMILTON.

[*Comptes Rendus*, XCVIII. (1884), pp. 273—276, 471—475.]

DANS une Note précédente*, j'ai fait allusion au cas où le déterminant de $x + ym + zn$ devient une fonction linéaire de x^3, y^3, z^3 sans que la quantité nommée Q s'évanouisse. Dans ce cas, on aura

$$(mn)^3 + Q(mn) - R = 0, \tag{1}$$

R étant le déterminant de mn. C'est bien la peine, comme on va le voir, de donner plus de précision aux équations qui lient ensemble mn et nm pour ce cas.

En suivant la même marche que pour le cas particulier où $Q = 0$, on trouvera sans difficulté les résultats suivants:

$$nm = -\frac{3Q}{\zeta}(mn)^2 - \frac{\zeta + 9R}{2\zeta}\, mn - \frac{2Q^2}{\zeta}, \tag{2}$$

$$mn = \frac{3Q}{\zeta}(nm)^2 - \frac{\zeta - 9R}{2\zeta}\, nm + \frac{2Q^2}{\zeta}, \tag{3}$$

ζ étant le produit des différences des racines de la fonction $\lambda^3 + Q\lambda - R$, de sorte que $\zeta^2 = -(4Q^3 + 27R^2)$.

Conséquemment on peut écrire

$$nm = \quad A(mn)^2 + Bmn + C, \tag{4}$$

$$mn = -A(nm)^2 + B'nm - C, \tag{5}$$

où A et C peuvent être tous les deux zéro, ou tous les deux des quantités finies quelconques, mais non pas l'un d'entre eux une quantité finie et l'autre zéro, et B, B' les deux racines par rapport à B de l'équation

$$B^2 + B + 1 + \frac{AC}{2} = 0\dagger. \tag{6}$$

* *Comptes rendus*, t. XCVII. p. 1336.

[† It follows from $n(mn + \theta) = (nm + \theta)n$ that $M, = mn$ and $N, = nm$ both satisfy equation (1); further $MN = NM$ (footnote * p. 127 above), so that (p. 149 above) there exists an equation $N = pM^2 + qM + r$; from (1), if $|M - N| \neq 0$, follows $M^2 + MN + N^2 + Q = 0$. Hence (2), (3) can be deduced.]

On peut vérifier, comme je l'ai fait, par un calcul algébrique direct, que les équations (4) et (5), en vertu des équations (1) et (6), sont compatibles.

Or une chose digne de remarque, c'est ce qui arrive quand $\zeta = 0$, car cela servira à révéler un phénomène d'Algèbre universelle d'un genre que personne n'avait encore même soupçonné.

Dans ce cas, les deux équations (4) et (5) changent leur caractère et deviennent

$$Q\,(mn)^2 + 3Rmn + \tfrac{2}{3}Q^2 = 0,$$
$$Q\,(nm)^2 + 3Rnm + \tfrac{2}{3}Q^2 = 0,$$

de sorte que mn et nm cessent d'être fonctions l'un de l'autre.

Nommons, pour le moment, $mn = u$, $nm = v$; on aura, comme auparavant, $uv = vu$, sans que v et u soient fonctionnellement liés ensemble. Dans le *Johns Hopkins Circular* de janvier 1884 (dans l'article intitulé *On the three laws of motion in the world of universal Algebra*, [above p. 146]), on trouvera le moyen d'établir qu'en général cette équation amène à la conclusion que ou u doit être un *scalar*, c'est-à-dire de la forme $\begin{matrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{matrix}$, ou bien v un scalar, ou sinon que nm, mn doivent être fonctions l'un de l'autre; mais on remarquera (ce qui m'avait alors échappé) que, si $Fu = 0$ est l'équation identique en u et que la dérivée fonctionnelle $F'u$ est une matrice *vide* (*vacuous*), c'est-à-dire dont le déterminant est zéro, le raisonnement est en défaut; cette vacuité a lieu dans le cas, et seulement dans le cas, où deux des racines latentes (lambdaïques) de m sont égales. On peut généraliser cette conclusion et l'étendre à deux matrices u et v d'un ordre quelconque au-dessus du deuxième; c'est-à-dire quand les racines latentes de u (ou bien de v) ne sont pas toutes inégales, *il est des cas* où $uv = vu$, sans que u ou v soient des scalars et sans que v et u soient fonctions l'un de l'autre. Par exemple, si l'on fait

$$u = \begin{vmatrix} 0 & \rho & \rho^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \rho^2 & \rho & 0 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \rho & 0 & \rho^2 \\ \rho & \rho^2 & 0 \end{vmatrix},$$

on trouvera

$$uv = \begin{vmatrix} -\rho & \rho & 1 \\ \rho & -\rho & 1 \\ \rho^2 & \rho^2 & -\rho \end{vmatrix} = vu.$$

Mais on démontrera sans difficulté que v ne peut pas s'exprimer comme somme de puissances de u, ni *vice versa* v comme somme de puissances de u.

On n'a pas besoin de remarquer que la seule condition de l'existence de racines latentes égales en u ou en v ne peut pas suffire en elle-même pour assurer que $uv = vu$, mais il faut réserver pour une autre occasion la pleine discussion de la totalité des solutions de cette équation importante.

J'ajouterai seulement cette remarque, qui est essentielle. En supposant l'existence des équations

$$\begin{aligned} m^2n + mnm + nm^2 &= 0, \\ n^2m + nmn + mn^2 &= 0, \\ (mn)^3 + Qmn - R &= 0, \\ (nm)^3 + Qnm - R &= 0, \end{aligned}$$

qui ont lieu nécessairement quand le déterminant de $x + ym + zn$ devient une fonction linéaire de x^3, y^3, z^3, et en regardant nm comme fonction de mn (en vertu de l'équation $mn \,.\, nm = nm \,.\, mn$), alors, en additionnant aux deux valeurs de nm (exprimé comme fonction de mn) données ci-dessus, qui correspondent aux deux valeurs de ζ, c'est-à-dire $\sqrt{-(4Q^3 + 27R^2)}$, on a à considérer quatre autres valeurs, le nombre total en étant six. Car si l'on suppose $nm = A\,(mn)^2 + Bmn + C$ et si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois racines de $\lambda^3 + Q\lambda - R = 0$, les valeurs de A, B, C sont déterminées en mettant

$$\begin{aligned} A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C &= \lambda_i, \\ A\lambda_2^2 + B\lambda_2 + C &= \lambda_j, \\ A\lambda_3^2 + B\lambda_3 + C &= \lambda_k, \end{aligned}$$

où i, j, k sont respectivement

$$1\ 2\ 3 \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \text{ou bien} \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Les valeurs de A, B, C données ci-dessus correspondent au deuxième de ces groupes de valeurs de i, j, k.

Si l'on écrit $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, on trouvera $nm = mn$.

Si l'on écrit $i = 1$, $j = 3$, $k = 2$, en faisant $\lambda_1 = \Lambda$, on trouvera

$$nm = \frac{3\Lambda\,(mn)^2 - Qmn + 2\Lambda Q}{3\Lambda^2 + Q}.$$

Dans le cas critique où $\zeta = 0$, de sorte que $3\Lambda^2 + Q = 0$, l'équation devient $(mn)^2 + \Lambda mn - 2\Lambda^2 = 0$, comme dans le cas déjà traité. Quand on suppose Q égal à zéro et R (c'est-à-dire le déterminant de mn) fini, les seules solutions possibles avec ces conditions sont celles fournies en écrivant $i, j, k = 2, 3, 1$, ou $3, 1, 2$; mais, pour le cas général, il n'y a pas de raison (au moins *très évidente*) pour exclure aucune des trois classes de solution. Si l'on admet la légitimité des solutions de la troisième classe, en écrivant

$$nm = A\,(mn)^2 + Bmn + C,$$

on trouvera
$$B^2 + B + \frac{AC}{2} = 0$$

au lieu de l'équation

$$B^2 + B + 1 + \frac{AC}{2} = 0,$$

qui est applicable aux solutions de la deuxième classe.

Avant de considérer l'équation $xy = yx$, il importe d'avoir une idée nette d'une certaine classe de matrices que je nomme *privilégiées* ou *dérogatoires*, en tant qu'elles dérogent à la loi générale que toute matrice est assujettie à satisfaire à une équation identique dont le degré ne peut pas être moindre que l'ordre de la matrice.

Les matrices dérogatoires sont justement celles qui satisfont à une équation d'un ordre inférieur à leur ordre propre; on peut les nommer *simplement, doublement, triplement, ... dérogatoires,* selon que le degré de l'équation identique à laquelle elles satisfont diffère par une, deux, trois, ... unités du degré minimum ordinaire.

Pour le cas des matrices du deuxième ordre, il n'y a que les *scalars* $\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & a \end{matrix}$ qui soient dérogatoires.

Pour le cas des matrices du troisième ordre, en écartant les *scalars* de la forme $\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix}$, toute matrice x dérogatoire peut être ramenée ou à la forme

$$a + b(\epsilon + \epsilon^2),$$

où ϵ est une matrice qui satisfait à l'équation $\epsilon^3 = 1$, c'est-à-dire une matrice dont les racines latentes sont 1, ρ, ρ^2, ou à la forme

$$a + b(1 + \epsilon + \epsilon^2)\zeta,$$

où $\epsilon^3 = 1, \quad \zeta^3 = 1 \quad \text{et} \quad \zeta\epsilon = \rho\epsilon\zeta,$

ρ signifiant une racine cubique primitive de l'unité. Dans le premier cas,

$$x^2 - (2a + b)x + (a^2 + ab - 2b^2) = 0,$$

et dans le second

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

car on trouvera facilement que

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2)\zeta(1 + \epsilon + \epsilon^2)\zeta = 0.$$

Pour le cas du quatrième ordre, en écartant les scalars et en se bornant au cas où l'équation identique dérogée (vue pour le moment comme une équation ordinaire en x) ne contient pas des racines égales, toute matrice x peut être ramenée à l'une ou à l'autre des deux formes suivantes :

$$a + b(U + U^3) \quad \text{ou bien} \quad a + b\left(U + \frac{1 + ki}{1 + i}U^2 + kU^3\right),$$

où U est une matrice du quatrième ordre telle que $U^4 + 1 = 0$; a, b, k sont des scalars arbitraires et i est une racine primitive biquadratique de l'unité; quand, pour la seconde forme $k = 1$, on trouvera qu'il y aura une dérogation double de l'ordre de l'équation satisfaite par x, l'équation identique pour x ne sera que du deuxième degré.

En réservant les détails du calcul, voici le résultat général que j'ai démontré rigoureusement (en m'aidant de la notation des nonions) pour les matrices du troisième degré qui satisfont à l'équation $xy = yx$.

A moins que x ne soit une matrice privilégiée ou dérogatoire, y sera toujours une fonction rationnelle et entière quadratique de x, et de même, à moins que y ne soit privilégiée, x sera une fonction pareille de y.

Il est bien entendu que le caractère dérogatoire d'une seule des deux matrices n'empêche pas qu'elle ne soit une fonction entière et rationnelle quadratique de l'autre. Dans le cas où x et y sont tous les deux dérogatoires, ni l'un ni l'autre ne peut être exprimé comme fonction explicite l'un de l'autre, mais ils seront liés ensemble par une équation linéo-linéaire.

Il paraît peu douteux qu'une règle semblable doive être applicable à l'équation $xy = yx$, quel que soit l'ordre des matrices x et y, sauf quand l'équation qui lie ensemble x et y pourra être d'un degré moindre que l'ordre de chacune d'elles.

Il est bon de remarquer que nulle matrice ne peut être dérogatoire, sauf pour le cas où il existe des égalités entre ses racines latentes; mais ces égalités peuvent parfaitement subsister sans que la matrice à laquelle elles appartiennent soit dérogatoire. En général, si $x = a + by + cy^2$, on peut, par une formule générale que j'ai déjà donnée, exprimer y sous la forme

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2;$$

avec l'aide des racines latentes de x, cette formule ne cesse pas en général d'être valable, même pour le cas où x contient des racines égales, en regardant leur différence comme une quantité infinitésimale; seulement le nombre des racines finies subira dans ce cas une diminution; mais, dans le cas où l'équation $xy = yx$ (x étant dérogatoire) mènerait à l'équation

$$x = a + by + cy^2,$$

on trouverait que nulle fonction explicite de x avec des coefficients finis ne peut exprimer le y cherché.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que rien n'empêche, dans le cas où l'un ou l'autre de x et y ou tous les deux sont dérogatoires, qu'on puisse satisfaire à $xy = yx$, en supposant que x et y soient des fonctions explicites chacune l'une de l'autre: tout ce qu'on affirme, c'est que, dans le cas admis, cette supposition cesse d'être obligatoire; c'est un cas très semblable à ce qui arrive dans le cas de défaut (*failing case*) du théorème de Maclaurin: c'est celui où une variable est une fonction sans pouvoir être développée dans une série de puissances d'une autre variable.

Dans ce qui précède, on a vu un exemple du fait général que, m étant une matrice donnée, l'équation $\phi(x, m) = 0$, pour certaines valeurs de m, cesse d'admettre la solution ordinaire $x = Fm$.

Mais il existe encore une classe assez étendue d'équations entre x et m pour lesquelles, quand m prend certaines valeurs, x n'a aucune existence actuelle; par exemple, m étant une matrice *vide* d'un ordre quelconque, si $mx = 1$, la matrice x devient inexprimable et n'a, pour ainsi dire, qu'une existence idéale.

Je citerai encore l'exemple $x^2 = m$, m étant une matrice du deuxième ordre; si les racines latentes de m sont inégales, on trouvera, par la formule générale, quatre valeurs de x. Si les deux racines latentes sont égales et finies, ces quatre valeurs se réduisent à deux; mais, si les deux racines sont toutes les deux égales à zéro, il n'y aura aucune valeur de x qui satisfasse à l'équation donnée, c'est-à-dire si $m = \begin{matrix} a & -\frac{a}{k} \\ ka & -a \end{matrix}$; l'équation devient absolument insoluble, ou, si l'on peut s'exprimer ainsi, les quatre racines carrées de m sont toutes idéales.

Dans le cas supposé, on vérifiera aisément que $m^2 = 0$ et, *vice versa*, toute racine carrée du zéro binomial est de la forme $\begin{matrix} a & -\frac{a}{k} \\ ka & -a \end{matrix}$, de sorte que l'on peut dire qu'une racine carrée quelconque du zéro binomial ne possède pas elle-même des racines algébriques quelconques, ou, en d'autres termes, une racine algébrique quelconque du quaternion $i + \sqrt{(-1)}\, j$ est purement idéale et n'admet pas d'être représentée sous la forme d'un quaternion. Finalement je remarque que toute matrice est d'un certain ordre et d'une certaine classe; l'ordre, c'est le nombre total de ses racines latentes; la classe, c'est le degré minimum de l'équation latente (c'est-à-dire de l'équation identique à laquelle la matrice satisfait), lequel ne peut être plus petit que le nombre des racines latentes inégales.

Je dois ajouter (ce que j'aurais dû dire auparavant) que, quand x est une matrice ternaire dérogatoire dont *toutes les racines latentes sont égales*, l'équation $xy = yx$ peut subsister sans que ni x ni y ne soit une fonction explicite l'un de l'autre, même quand y n'est pas une matrice privilégiée; c'est le cas où, ϵ et ζ faisant partie d'un groupe de nonions élémentaires, on a $x = a + b(1 + \epsilon + \epsilon^2)\,\zeta$. Les calculs sont un peu compliqués pour ce cas spécial, mais je crois ne pas me tromper en faisant cette correction. Le champ de la théorie de la quantité multiple est tellement nouveau et inexploité que, sans les plus grandes précautions, on est toujours en danger de se heurter contre quelque cause imprévue d'incertitude ou même d'erreur.