13.

SUR LES QUANTITÉS FORMANT UN GROUPE DE NONIONS ANALOGUES AUX QUATERNIONS DE HAMILTON.

[*Comptes Rendus*, XCVII. (1883), pp. 1336—1340.]

On sait qu'on peut tout à fait (et très avantageusement) changer la base de la théorie des quaternions en considérant les trois symboles i, j, k de Hamilton comme des matrices binaires.

Si h, j sont des matrices binaires qui satisfont à l'équation $hj = -jh$, on démontre facilement que, en écartant le cas où $hj = jh = 0$, h^2 et k^2 seront de la forme

$$\begin{array}{cc} c & 0 \\ 0 & c \end{array}, \quad \begin{array}{cc} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{array}$$

c'est-à-dire cu, γu, où u est l'unité binaire

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

On peut ajouter, si l'on veut, les deux conditions $c^2 = \bar{1}$, $\gamma^2 = \bar{1}$; alors, en supprimant, pour plus de brièveté, le u, qui jouit de propriétés tout à fait analogues à celles de l'unité ordinaire, on obtient facilement les équations connues

$$h^2 = \bar{1}, \quad j^2 = \bar{1}, \quad k^2 = \bar{1},$$

$$hj = -jh = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

De plus, en supposant que (i, j) soit un système particulier qui satisfait à l'équation $ij = -ji$, on peut déduire les valeurs universelles de I, J qui satisfont à l'équation $IJ = -JI$ en termes de i, j. En effet, on démontre rigoureusement que, en écartant toujours la solution $mn = nm = 0$, on aura

$$I = ai + bj + cij,$$

$$J = \alpha i + \beta j + \gamma ij,$$

avec la seule condition $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. De plus, si l'on suppose $i^2 = j^2 = \bar{u}$ et aussi $I^2 = J^2 = \bar{u}$, on aura

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

de sorte que, en écrivant $ij = k$, $IJ = K$ et $K = Ai + Bj + Ck$, la matrice

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{matrix}$$

formera une matrice orthogonale. Une solution, parmi les plus simples, des équations $ij = -ji$, $i^2 = \bar{u}$, $j^2 = \bar{u}$, est la suivante:

$$i = \begin{vmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{vmatrix}, \quad j = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

et conséquemment

$$k = ij = \begin{vmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{vmatrix},$$

où $\theta = \surd(-1)$.

En écrivant une quantité binormale quelconque (c'est-à-dire une matrice binaire) sous la forme

$$\begin{matrix} a + b\theta, & -c - d\theta, \\ c - d\theta, & a - b\theta, \end{matrix}$$

on voit qu'elle peut être mise sous la forme $au + bi + cj + dk$, où il est souvent commode de supprimer (c'est-à-dire de sous-entendre) sans écrire l'unité binaire u.

On peut construire d'une manière tout à fait analogue un système de nonions en considérant l'équation $m = \rho n$, où m, n sont des matrices ternaires et ρ une racine cubique primitive de l'unité (voir* la *Circular* du *Johns Hopkins University* qui va prochainement paraître), en prenant pour les nonions fondamentaux u (l'unité ternaire)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

et les huit matrices m, m^2; n, n^2; m^2n, mn^2; mn, m^2n^2 construites avec les valeurs les plus simples de m, n qui satisfont aux équations

$$nm = \rho mn, \quad m^3 = u, \quad n^3 = u.$$

Les valeurs

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{vmatrix} \quad \text{et } n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \\ \rho^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

peuvent être prises pour les valeurs basiques du système de nonions.

Une quantité ternaire (c'est-à-dire une matrice) quelconque s'exprime alors sous la forme

$$a + bm + \beta m^2 + cn + \gamma n^2 + dm^2n + \delta mn^2 + emn + \epsilon m^2n^2;$$

[* Vol. III. of this Reprint, p. 647. Also below, p. 122.]

mais, quand cette matrice M est capable de s'associer avec une autre N dans l'équation $NM = \rho MN$, alors il devient nécessaire que

$$a = 0, \quad b\beta + c\gamma + d\delta + e\epsilon = 0.$$

Je n'entrerai pas ici dans les détails de la méthode d'associer la solution générale de l'équation $NM = \rho MN$ avec une solution quelconque particulière de cette équation, mais je me bornerai à expliquer quelles sont les conditions auxquelles les éléments de M et de N doivent satisfaire afin que cette équation ait lieu.

M. Cayley a résolu la question analogue pour les matrices binaires dans le beau Mémoire, qu'il a publié dans les *Transactions of the Royal Society* de 1858. En supposant que m et n sont les matrices

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a' & b' \\ c' & d' \end{matrix}$$

il trouve que, afin que $nm = -mn$, il faut avoir

$$a + d = 0, \quad a' + d' = 0, \quad aa' + bc' + cb' + dd' = 0.$$

Au lieu de cette troisième équation (en la combinant avec les deux précédentes), on peut écrire

$$ad' + a'd - bc' - b'c = 0.$$

Alors ces trois conditions équivalent à dire que le déterminant de la matrice $xu + my + nz$ (u étant l'unité binaire), qui, en général, est de la forme

$$x^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2,$$

se réduira à la forme

$$x^2 + Dy^2 + Fz^2,$$

car, dans le déterminant de $xu + my + nz$, c'est-à-dire de

$$\begin{vmatrix} x + ay + a'z & by + b'z \\ cy + c'z & x + dy + d'z \end{vmatrix},$$

les coefficients de xy, xz, yz seront évidemment

$$a + d, \quad a' + d', \quad ad' + a'd - bc' - b'c$$

respectivement.

Passons au cas de m et n, matrices ternaires qui satisfont à l'équation

$$nm = \rho mn.$$

Formons le déterminant de $xu + ym + zn$, où u représente l'unité ternaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant sera de la forme

$$x^3 + 3Bx^2y + 3Cx^2z + 3Dxy^2 + 6Exyz + 3Fxz^2 + Gy^3 + 3Hy^2z + 3Kyz^2 + Lz^3,$$

et je trouve que, dans le cas supposé, il faut que les sept conditions souscrites soient satisfaites; $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=0$, $H=0$, $K=0$, de sorte que la fonction en x, y, z devient une somme de trois cubes, mais ces sept conditions, qu'on pourrait nommer *conditions paramétriques*, quoique nécessaires, ne sont pas suffisantes; il faut y ajouter une huitième condition que je nommerai $Q=0$.

Pour former Q, voici la manière de procéder:

En supposant que

$$m = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad n = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k' \end{vmatrix},$$

on écrit, au lieu de m, son transversal

$$\begin{vmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & k' \end{vmatrix},$$

et l'on forme neuf produits en multipliant chaque déterminant mineur du second ordre contenu dans m avec le déterminant mineur semblablement posé dans le transversal de n: la somme de ces neuf produits est Q.

Ces huit conditions que je démontre sont suffisantes et nécessaires (en écartant comme auparavant le cas où $nm = mn = 0$) pour que $nm = \rho mn$.

On pourrait très bien se demander ce qui arrive dans le cas où les sept conditions paramétriques sont satisfaites, mais non pas la huitième condition supplémentaire.

Dans ce cas, je trouve* que mn et nm restent fonctions l'une et l'autre et qu'on aura

$$nm = A + B_1 mn + C(mn)^2,$$
$$mn = -A + B_2 nm + C(nm)^2,$$

où B_1, B_2 sont les racines de l'équation algébrique

$$B^2 + B + 1 = 0,$$

A, C étant deux quantités arbitraires et indépendantes, sauf que l'une d'elles ne peut pas s'évanouir sans l'autre, les deux s'évanouissant ensemble pour le cas (et seulement pour le cas) où Q (qui fournit la condition supplémentaire) s'évanouit.

[* See footnote [†], p. 154 below.]