8.

SUR UN THÉORÈME DE PARTITIONS* DE NOMBRES COMPLEXES CONTENU DANS UN THÉORÈME DE JACOBI.

[*Comptes Rendus,* XCVI. (1883), pp. 1276—1280.]

DANS le *Journal de Crelle,* t. XXXII. p. 166, Jacobi fait la remarque que le développement en série de $\Theta_1 x$ donne lieu à un théorème que j'exprime de la manière suivante.

Soient a et b deux quantités $c = a + b$; *alors le produit infini*

$$(1 \mp q^a)(1 \mp q^b)(1 - q^c)(1 \mp q^{a+c})(1 \mp q^{b+c})(1 - q^{2c}) \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\mp)^i q^{\frac{i^2c + i(a-b)}{2}}.$$

Ce théorème étant vrai pour un nombre infini de valeurs de $\frac{a}{b}$ sera, par sa forme même, nécessairement vrai quand a et b sont de symboles absolument arbitraires, et l'on voit facilement que, pour le montrer dans ce sens universel, il suffira d'énoncer un certain théorème sur les nombres complexes dont voici l'énoncé :

Désignons par C, B, A des nombres complexes de la forme fc, $fc + b$, $fc + a$, *où f est ou zéro ou un nombre entier et positif quelconque.*

Considérons un arrangement composé avec des C, des B et des A non répétés ou avec des C, B, A pris seuls ou combinés deux à deux, en excluant les arrangements (que je nomme exceptionnels) qui ne contiennent que des B formant une série arithmétique dont b est le dernier terme et c la différence constante, ou des A formant une série semblable dont a est le dernier terme.

Par le caractère majeur et le caractère mineur d'un tel arrangement, je désigne la parité ou l'imparité du nombre total *des termes et du nombre des C qu'il contient. Je dis qu'à chaque arrangement (non exceptionnel) on peut en associer un autre pareil dont la somme totale des éléments (les A, B, C) sera la même, mais dont les caractères seront tous les deux opposés.*

La démonstration deviendra plus claire en se servant de la notation suivante. En désignant par X un symbole d'une série de termes, je me servirai de X et de X pour signifier le terme le plus haut et le terme le plus

[* See above, p. 59 ff.]

bas de la série, et en me servant de Y ou Z pour signifier un symbole ou simple ou affecté de marques quelconques, j'emploie les notations

$$Y=0, \quad Y+Z=0, \quad Y>0, \quad Y+Z>0,$$

pour signifier que les Y manquent, que les Y et les Z manquent tous les deux, que les Y ne manquent pas, que les Y et les Z ne manquent pas tous les deux.

Je divise les B (d'un arrangement quelconque) en deux espèces, $'B$ et B', dont $'B$ représente un B appartenant à la série arithmétique (la plus grande qu'on puisse former) commençant avec le plus grand B, et B' les autres B qui se trouvent dans l'arrangement.

Ainsi je divise les A en ${}_{\prime}A$ et en $A_{\prime}$; $A_{\prime}$ signifie un A appartenant à la série arithmétique la plus grande qu'on puisse former, dont a est le terme minimum (de sorte que, si l'arrangement ne contient pas un a, $A_{\prime}$ manque) et ${}_{\prime}A$ signifie les autres A de l'arrangement.

Finalement un point au centre d'un symbole à droite ou à gauche signifiera ce symbole diminué ou augmenté respectivement de c.

On voit que dans cette notation les arrangements exceptionnels seront exprimés ainsi : ceux qui appartiennent à l'une des deux classes par les conditions $'B-b=0$ avec $A+C=0$, et les autres par les conditions $B=0$ avec ${}_{\prime}A+C=0$.

Je divise les arrangements non exceptionnels en trois classes, dont les conditions seront respectivement les suivantes :

Première classe :

$$'\underset{\cdot}{B}-b>0 \quad \text{ou} \quad ('\underset{\cdot}{B}-b=0 \quad \text{avec} \quad \underset{\cdot}{C}-c \leqq '\dot{B}-b).$$

Deuxième classe :

$$'B-b=0 \quad \text{avec} \quad (\underset{\cdot}{C}-c>'\dot{B}-b \quad \text{ou} \quad C=0, \ \text{mais} \ A+C>0),$$

ou
$$B=0 \quad \text{avec} \quad (A=0 \quad \text{ou} \quad \underset{\cdot}{A}-a \gtreqless C).$$

Troisième classe :

$$B=0 \quad \text{avec} \quad A>0 \quad \text{et} \quad \underset{\cdot}{A}-a<\underset{\cdot}{C} \quad \text{et} \quad {}_{\prime}A+C>0.$$

Toutes les hypothèses possibles se trouvent comprises dans ces tableaux des arrangements exceptionnels et non exceptionnels.

A chacune des trois classes des derniers je vais assigner un opérateur qui peut être appliqué à chaque arrangement de cette classe et qui le transformera dans un autre arrangement appartenant à la même classe ; cette disposition, appliquée deux fois successivement, reproduira l'arrangement sur lequel on opère, lequel ne changera pas la somme des éléments, mais changera chacun des deux caractères en sens opposé : c'est-à-dire que chacun des trois opérateurs que je vais définir, et que je nommerai ϕ, ψ, ϑ, doit satisfaire à cinq conditions qu'on peut nommer *catholicité, homœogénèse, mutualité, inertie* et *énantiotropie.*

1. ϕ signifie que, si $C=0$ ou $\d{C}-c > {}'\dot{B}-{}'\d{B}$, on doit former un nouveau C, en substituant, pour chaque ${}'B$, ${}'B\cdot$ (c'est-à-dire sa valeur diminuée de c), et reconstituer l'inertie originale en ajoutant ensemble les c ainsi soustraits pour former un nouveau C, et que, dans le cas contraire, $\d{C}$ doit être décomposé en simples c, dont on ajoutera un au premier ${}'B$ (le B le plus grand), un au second ${}'B$, etc., jusqu'à ce que tous les c dont on a à disposer soient épuisés.

2. ψ signifie que, si $B>0$ ou $C=0$, ou $\d{C} > {}'\dot{B}+A$, on doit former un nouveau C en substituant à ${}'\dot{B}$ et A leur somme et que, dans le cas contraire, $\d{C}$ doit être décomposé en ${}'\cdot\dot{B}$ et A si $B>0$ et en b et A si $B=0$.

3. ϑ signifie que, si $C=0$ ou $\d{C}+\dot{A}_{,} = > \d{A}$, il faut décomposer ${}_{,}A$ en $\cdot\dot{A}_{,}$ et C ou en a et C, selon que $A_{,} =$ ou >0, et que, dans le cas contraire, pour $\d{C}$ et $\dot{A}_{,}$, il faut substituer leur somme. On sera satisfait en étudiant les conditions des trois classes que les ϕ, ψ, ϑ possèdent tous les trois cinq attributs voulus : la preuve en est facilitée en supposant que, dans chaque série des C, des B et des A, prise séparément, on suit un ordre régulier de grandeur dans l'arrangement de ces termes respectivement au multiple de c qui entre dans chacun d'eux.

Si l'on donne à a et à b des valeurs quantitatives (ce qui est toujours permis), et en particulier les valeurs 1 et 2 respectivement, on retombe sur le théorème d'Euler, mais (chose à noter) la correspondance donnée par le procédé général appliqué à ce cas ne sera nullement identique à la correspondance donnée par le procédé de Franklin. En effet, les arrangements exceptionnels ne seront pas les mêmes dans les deux méthodes : selon le procédé de Franklin, les arrangements non conjugables sont de la forme

$$i,\ i+1,\ \ldots,\ 2i-1 \quad \text{ou} \quad i+1,\ i+2,\ \ldots,\ 2i,$$

tandis que la méthode actuelle donnera, comme non conjugués, les arrangements de la forme

$$1,\ 4,\ \ldots,\ 3i-2 \quad \text{ou} \quad 2,\ 5,\ \ldots,\ 3i-1.$$

La méthode employée ici fournira elle-même toujours deux systèmes de correspondance absolument distincts, dont on obtient l'un, qui n'est pas exprimé, en échangeant entre eux les a, A et les b, B, car la méthode n'est pas symétrique dans son opération sur ces deux systèmes de lettres.

Ce cas est analogue à celui de la correspondance perspective entre deux triangles, laquelle peut être simple ou triple, comme je l'ai montré ailleurs. Jacobi, dans l'endroit cité, a fait la remarque que, pour $a=1$, $b=2$, en se servant du signe supérieur ($\mp$) dans son théorème, on retombe sur le théorème d'Euler et que, pour le cas de $a=1$, $b=1$, en se servant du signe inférieur, sur un théorème donné (il y a longtemps par Gauss). On peut ajouter que, si avec cette supposition on se sert du signe supérieur, on obtient $0=0$, mais si l'on écrit $a=1-\epsilon$, $b=1$, en faisant ϵ infinitésimal, on tombe (chose singulière) sur l'équation de Jacobi elle-même,

$$(1-q)^3(1-q^2)^3(1-q^3)^3+\ldots=1-3q+5q^3-7q^6+\ldots.$$

Puisque j'ai introduit le nom de l'auteur des *Fundamenta nova,* qu'on me permette la remarque que, dans les deux avant-dernières lignes de l'avant-dernière page de cet immortel Ouvrage, on trouve un théorème qui équivaut à l'équation

$$\frac{q}{1+q}-\frac{q^3}{1+q^3}+\frac{q^5}{1+q^5}-\ldots=\frac{q}{1+q}-\frac{q^{1+2}}{1+q^2}+\frac{q^{1+2+3}}{1+q^3}-\ldots;$$

or, le premier cas du théorème intitulé: *Sur un théorème d'Euler*, contenu dans une Note précédente des *Comptes rendus**, affirme que le nombre des séries arithmétiques avec lesquelles on peut exprimer n est égal au nombre des diviseurs impairs de n, laquelle considération mène immédiatement à une conséquence qu'on ne pourrait manquer d'observer (mais que M. Franklin, effectivement, a remarquée le premier) et qui s'exprime par l'équation

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\ldots=\frac{q}{1-q}+\frac{q^{1+2}}{1-q^2}+\frac{q^{1+2+3}}{1-q^3}+\ldots,$$

équation très ressemblante à l'autre et qui peut être combinée avec elle de manière à donner naissance à quatre autres équations de la même espèce.

On n'a pas besoin de dire que le théorème qui constitue la matière principale de cette Note, en faisant $a=1$ et en considérant b comme une quantité arbitraire, contient ou au moins conduit immédiatement au développement de $\Theta_1 x$ dont Jacobi l'a traité comme conséquence.

[* p. 95 above. Cf. p. 25 above.]