6.

PREUVE GRAPHIQUE* DU THÉORÈME D'EULER SUR LA PARTITION DES NOMBRES PENTAGONAUX.

[*Comptes Rendus*, XCVI. (1883), pp. 743—745.]

UNE partition quelconque de n peut être représentée par un assemblage de points uniformément distribués sur un plan et limités par deux lignes droites. Ainsi, par exemple, l'arrangement suivant:

$$\begin{array}{lllllll} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \end{array}$$

sera la représentation graphique de la partition du nombre 22 dans les parties

$$7, \; 5, \; 5, \; 3, \; 2.$$

Mais, de plus, un tel arrangement de points peut être distribué dans un carré et deux groupes que je nommerai *latéral* et *inférieur*. Ainsi, l'arrangement écrit ci-dessus peut être décomposé dans un carré de neuf points, dans un groupe latéral de huit et dans un groupe inférieur de cinq points.

Considérons les partitions de n dans j parties *inégales*. Tous les arrangements de points qui correspondent à ces partitions peuvent être classifiés selon la valeur du côté du carré qui y correspond et que je nommerai θ. Alors, pour une valeur donnée de θ, le groupe latéral contiendra nécessairement ou θ ou $\theta - 1$ lignes de points, car autrement il y aurait des parties égales dans l'arrangement. Dans le premier cas, le nombre de colonnes dans ce groupe inférieur peut être un nombre quelconque, mais pas plus grand que θ; dans le second cas, pas plus grand que $\theta - 1$. Donc, en se rappelant que le nombre de partitions de ν en θ parties inégales est le coefficient de x dans le développement de

$$\frac{x^{\frac{\theta^2+\theta}{2}}}{1 - x \,.\, 1 - x^2 \ldots 1 - x^\theta}$$

et que le nombre de partitions de ν dans $j - \theta$ parties inégales et pas plus grandes que θ est le coefficient de $x^\nu a^{j-\theta}$ dans le développement de

$$(1 + ax)(1 + ax^2) \ldots (1 + ax^\theta),$$

on voit que, quand le nombre de lignes dans le groupe latéral est θ, le nombre

[* See p. 32 above.]

total d'arrangements de n dans j parties inégales qui correspondent à cette espèce de distribution sera le coefficient de $x^{n-\theta^2}a^{j-\theta}$ dans le développement de

$$\frac{1+ax\,.\,1+ax^2\dots 1+ax^\theta}{1-x\,.\,1-x^2\dots 1-x^\theta}\,x^{\frac{\theta^2+\theta}{2}}.$$

De même, le nombre des partitions qui correspondent à la seconde hypothèse sera le coefficient de $x^{n-\theta^2}a^{j-\theta}$ dans le développement de

$$\frac{1+ax\,.\,1+ax^2\dots 1+ax^{\theta-1}}{1-x\,.\,1-x^2\dots 1-x^{\theta-1}}\,x^{\frac{\theta^2-\theta}{2}}.$$

En donnant à θ toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à l'infini, on obtiendra toutes les partitions de n dans j parties inégales. Les cas où θ excède j n'offrent rien d'exceptionnel, car, pour ces cas, le coefficient de $a^{j-\theta}$ dans les deux fonctions génératrices sera nul.

Or le coefficient de $x^{n-\theta^2}a^{j-\theta}$ dans chacune de ces deux fonctions est le même que le coefficient de x^na^j dans les produits qui résultent de leur multiplication par $x^{\theta^2}a^\theta$.

En comparant les coefficients de x^na^j pour toute valeur de n et i, on trouve donc

$$\begin{aligned}(1+xa)\,&(1+x^2a)(1+x^3a)+\dots\\ &=1+\frac{1+ax}{1-x}\,x^2a+\frac{1+ax\,.\,1+ax^2}{1-x\,.\,1-x^2}\,x^7a^2+\dots\\ &\quad+\frac{1+ax\,.\,1+ax^2\dots 1+ax^\theta}{1-x\,.\,1-x^2\dots 1-x^\theta}\,x^{\frac{3\theta^2+\theta}{2}}a^\theta+\dots\\ &\quad+xa+\frac{1+ax}{1-x}\,x^5a^2+\dots\\ &\quad+\frac{1+ax\,.\,1+ax^2\dots 1+ax^{\theta-1}}{1-x\,.\,1-x^2\dots 1-x^{\theta-1}}\,x^{\frac{3\theta^2-\theta}{2}}a^\theta+\dots.\end{aligned}$$

En mettant $a=-1$, on obtient ainsi

$$1-x\,.\,1-x^2\,.\,1-x^3-\dots=1-x-x^2-\dots+(-)^\theta\left(x^{\frac{3\theta^2-\theta}{2}}+x^{\frac{3\theta^2+\theta}{2}}\right)+\dots,$$

ce qui est le théorème d'Euler.

En réunissant les deux séries dans une seule, on obtient, pour le cas général,

$$\begin{aligned}&(1+xa)\,(1+x^2a)\,(1+x^3a)+\dots\\ &=1+\frac{1+ax^2}{1-x}\,xa+\frac{1+ax\,.\,1+ax^4}{1-x\,.\,1-x^2}\,x^5a^2+\frac{1+ax\,.\,1+ax^2\,.\,1+ax^6}{1-x\,.\,1-x^2\,.\,1-x^3}\,x^{12}a^3+\dots,\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation que j'ai donnée dans la Note précédente [p. 91].

Je dois dire que c'est M. Durfee, étudiant à Baltimore, qui, le premier (dans un tout autre problème), a fait usage du genre de décomposition d'une *assemblée régulière* de points dans un carré et deux groupes supplémentaires dont j'ai profité dans l'analyse précédente (voir *Johns Hopkins Circular*, [Vol. III. of this Reprint, pp. 661 ff.]).