O tworzeniu się wirów w płynie doskonałym.

Przez

LUDWIKA SILBERSTEINA.

(Z dwiema rycinami).

Rzecz przedstawiona na posiedz. Wydz. mat.-przyr. d. 1 czerwca 1896: ref. czł. Natanson.

W 56-tym tomie Annal'ów Wiedemanna[1]) okazał p. Schütz, że sławne twierdzenie v. Helmholtz'a[2]) o niemożliwości wytwarzania ruchów wirowych w płynie doskonałym, t. j. pozbawionym tarcia wewnętrznego, za pomocą sił zachowawczych jest słuszne litylko wobec założenia pewnych warunków dodatkowych.

W związku ze wspomnianą wyżej pracą p. Schütz'a pragnę w rozprawie niniejszej roztrząsnąć zagadnienie następujące: Jakie musi być rozmieszczenie gęstości i ciśnienia w płynie doskonałym, aby mogły w nim w danej chwili czasu powstać ruchy wirowe? Gdyby rozmieszczenie takie dało się urzeczywistnić, z jaką szybkością i w jakich kierunkach rozwijałyby się włókna wirowe w chwili tworzenia się?

---

[1]) 1895., str. 144—147.

[2]) *Wissenschaftl. Abhandlungen*, I., str. 101—134. „Ueb. Integrale d. hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen".

Zastrzegam się z góry, że bynajmniej nie mam tu na myśli przeprowadzenia dowodu, iż warunki wytwarzania wirów w płynie doskonałym za pomocą sił zachowawczych są fizycznie wyobrażalne i możliwe; chodzi mi tylko o ścisłe zbadanie analityczne tych warunków i wyprowadzenie kilku odpowiednich twierdzeń, które ze względu na swą przejrzystość mogłyby raczej ułatwić ewentualnie dowód fizycznej niemożliwości urzeczywistnienia tych warunków.

Zakładając wyłączne działanie sił zachowawczych, otrzymujemy, według Schütz'a (l. c.), za pomocą bardzo prostego przekształcenia, z ogólnych hydrodynamicznych równań różniczkowych następujące trzy równania odnoszące się do cząstki płynu, która w danej chwili nie posiada jeszcze żadnego zgoła ruchu wirowego:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right), \\ \eta' &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right), \\ \zeta' &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\}$$

W równaniach tych ξ, η, ζ oznaczają składowe (wytwarzającej się właśnie) prędkości wirowej, wzięte wzdłuż osi współrzędnych x, y, z, w chwili t, w punkcie x, y, z wewnątrz płynu; p jest ciśnieniem, ρ zaś gęstością w tymże punkcie w tej samej chwili czasu.

Wychodząc z tych równań, postaramy się rozwiązać sformułowane na wstępie zagadnienia i, mianowicie, wykonać rozwiązania w formie poglądowej, geometrycznej.

Wykonawszy działania, zaznaczone w równaniach (1) po stronie prawej, otrzymujemy:

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{p,\ \rho}{y,\ z}\right), \\ \eta' &= \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{p,\ \rho}{z,\ x}\right), \\ \zeta' &= \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{p,\ \rho}{x,\ y}\right), \end{aligned}\right\}$$

gdzie $\left(\frac{p,\ \rho}{y,\ z}\right)$ i t. d. są skróceniami odpowiednich wyznaczników. — Rozważajmy powierzchnie: 1°) stałego ciśnienia:

$$(3)\qquad p\,(x,\ y,\ z) = \text{const.}$$

i 2⁰) stałej gęstości:

$$\rho\,(x, y, z) = \text{const.}, \tag{4}$$

które w danej chwili przechodzą przez dany punkt x, y, z. Jeżeli powierzchnie te przecinają się wzajemnie, tak iż punkt x, y, z leży na linii przecięcia, wówczas rzuty dx, dy, dz elementu ds linii przecięcia, który odmierzamy począwszy od punktu x, y, z, muszą czynić zadość następującym dwom równaniom:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dz} &= -\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dz} &= -\frac{\partial \rho}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Rozwiązując równania te ze względu na dx/dz i dy/dz, otrzymujemy:

$$dx : dy : dz = \left(\frac{p, \rho}{y, z}\right) : \left(\frac{p, \rho}{z, x}\right) : \left(\frac{p, \rho}{x, y}\right), \tag{6}$$

t. j., według (2):

$$dx : dy : dz = \xi' : \eta' : \zeta'. \tag{7}$$

Mamy więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie I. Jeżeli w danej cząstce płynu doskonałego, podlegającego wyłącznemu działaniu sił zachowawczych, powstaje w pewnej chwili ruch wirowy, natenczas oś wirowa tej cząstki zlewa się początkowo z elementem linii przecięcia powierzchni stałego ciśnienia i powierzchni stałej gęstości, do których cząstka ta w danej chwili należy; wytwarzająca się linia wirowa zlewa się więc początkowo całkowicie z tą linią przecięcia.

Z twierdzenia tego atoli nie wynika jeszcze bynajmniej, że ruch wirowy istotnie zawsze wytworzyć się musi, skoro tylko wspomniane powierzchnie przecinają się wzajemnie. Dowiedziemy jednak, że tak jest w rzeczy samej.

Wyrazem matematycznym wypadkowego przyspieszenia wirowego ω' powstającego wiru jest:

$$\omega' = (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)^{1/2} = \frac{1}{2\rho^2}\left[\left(\frac{p, \rho}{y, z}\right)^2 + \left(\frac{p, \rho}{z, x}\right)^2 + \left(\frac{p, \rho}{x, y}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Dostawy kierunkowe normalnych n, v powierzchni p=const. i powierzchni ρ=const. w punkcie x, y, z są:

$$(9)\qquad a=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial p}{\partial x},\quad b=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial p}{\partial y},\quad c=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial p}{\partial z},$$

względnie:

$$(10)\qquad \alpha=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial \rho}{\partial x},\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial \rho}{\partial y},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

gdzie, dla skrócenia, położyliśmy:

$$(11)\qquad P=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2,\quad R=\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2.$$

Jeżeli jako d o d a t n i e uważamy t e kierunki normalnych n, v, w których ciśnienie i gęstość r o s n ą, natenczas musimy wziąć pierwiastki kwadratowe w (9) i (10) ze znakami d o d a t n i m i.

Kąt θ, który tworzą ze sobą dodatnie kierunki normalnych n i v, jest określony przez równanie:

$$(12)\qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{PR}}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right].$$

Z drugiej zaś strony suma w nawiasie po prawej stronie równania (8) równa się

$$\begin{aligned}\omega'^2.\,4\rho^4=&\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial z}\\
&-2\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x}-2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y}\\
&=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\right]\\
(13)\qquad&-\left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right]^2;\end{aligned}$$

łącząc związek ten z równaniem (12), otrzymujemy:

$$\cos^2\theta=1-\frac{4\rho^4\omega'^2}{PR};\quad 4\rho^4\omega'^2=PR\sin^2\theta,$$

a więc:

$$\omega' = \frac{1}{2\rho^2}\sqrt{PR}\sin\theta, \tag{14}$$

albo też, ponieważ n, ν są kierunkami, w których ciśnienie, względnie gęstość najszybciej rosną:

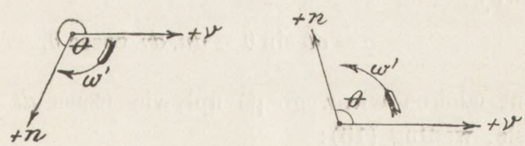
$$\omega' = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial v}\sin\theta. \tag{15}$$

Dochodzimy przeto do twierdzenia następującego:

Twierdzenie II. Niezbędnym i wystarczającym warunkiem wytworzenia się ruchu wirowego w cząstce płynu doskonałego, który podlega wyłącznemu działaniu sił zachowawczych jest to, że powierzchnia stałego ciśnienia i powierzchnia stałej gęstości, do których dana cząstka należy i które aż do rozważanej chwili zlewały się ze sobą ($\theta = 0$ albo $\theta = \pi$), zaczynają się w danej chwili wzajemnie przecinać, tak iż rozważana cząstka znajduje się na ich linii przecięcia. Oś powstającego wiru zlewa się z odpowiednim elementem linii przecięcia; cząstka płynu zaczyna mianowicie wirować naokoło tego elementu, od ν ku n (na krótszej drodze, patrz fig. 1.) z przyspieszeniem wirowem:

$$\omega' = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin(\nu, n) = \frac{1}{2\rho^2} V \frac{\partial \rho}{\partial \nu}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{15}$$

Fig. 1.



Rezultat powyższy możemy też wyrazić innemi słowy:

Cząstki płynu doskonałego pozbawione ruchu wirowego nie zaczynają też wirować (pod działaniem sił zachowawczych) dopóty i tylko dopóty, dopóki ciśnienie p daje się wyrazić jako funkcya samej tylko gęstości ρ[1]), tak iż odpowiednie powierzchnie p i ρ zlewają się ze sobą, — albo też dopóki ρ lub p, lub też obie ilości od miejsca (t. j. od x, y, z) w ogóle nie zależą.

Skoro jednak powierzchnie p i ρ przecinają się ze sobą w pewnej chwili, natychmiast wzdłuż ich przecięcia wytwarza się linia wirowa, a mianowicie tak, iż po upływie elementu czasu dt pojedyncze cząstki linii wirowej nabywają odpowiednich prędkości wirowych

$$d\omega = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \sin\theta . \, dt. \tag{16}$$

Jeżeli przecinają się ze sobą roje powierzchni p i powierzchni ρ, wówczas zamiast linii wirowej wytwarza się całe włókno wirowe, którego moment po upływie czasu dt można obliczyć według wzoru (16). Rozważajmy nieskończenie cienkie włókno wirowe, wypełniające kanał między dwiema powierzchniami stałego ciśnienia: p i $p + \frac{\partial p}{\partial n} dn$, i dwiema powierzchniami stałej gęstości: ρ i $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\nu$, które od pewnej chwili czasu zaczynają się przecinać ze sobą. Nie uciekając się nawet do pierwotnych wyrażeń składowych ξ, η, ζ prędkości wirowej (przez u, v, w), możemy wprost z wzoru (16) odczytać, że moment wirowy wytworzonego włókna wirowego posiada wzdłuż całego włókna jednę i tęż samą wartość. Wszystkie przekroje rozważanego włókna wirowego są bowiem równoległobokami o bokach

$$a = dn . \operatorname{cosec}\theta, \quad b = d\nu . \operatorname{cosec}\theta, \tag{17}$$

przecinających się pod kątem θ ($\theta = (n, \nu)$, jak wyżej); przekrój włókna jest przeto równy

$$q = ab \sin\theta = dn . d\nu . \operatorname{cosec}\theta, \tag{18}$$

a więc moment włókna wirowego po upływie czasu dt od chwili jego wytworzenia się, według (16):

---

[1]) Ciśnienie p zależy wogóle od gęstości ρ i temperatury ϑ; jeżeli jednak powierzchnie stałej gęstości są jednocześnie powierzchniami stałej temperatury, możemy wyrazić p jako funkcyę samej tylko gęstości ρ. Powierzchnie p przecinają się z powierzchniami ρ wówczas i tylko wówczas, gdy powierzchnie ϑ nie zlewają się ani z powierzchniami p, ani z powierzchniami ρ. (Patrz uw. na końcu rozprawy).

$$q.\,d\omega = \frac{dt}{2\rho^2}\,\frac{\partial p}{\partial n}\,\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\,dn\,d\nu$$

$$= -\frac{dt}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial n}\,dn.\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{\rho}\right)d\nu; \tag{19}$$

ponieważ zaś różnica ciśnień odpowiadających powierzchniom p zarówno jak i różnica gęstości, a więc też i różnica wartości $\frac{1}{\rho}$, odpowiadających powierzchniom ρ jest stałą wzdłuż całego kanału, przeto i wartość momentu wzdłuż całego włókna wirowego jest jedną i tąż samą.

Z czasem atoli moment jednego i tegoż samego włókna wirowego ustawicznie podlega zmianom, dopóty mianowicie, dopóki powierzchnie p i powierzchnie ρ przecinają się wzajemnie, nawet wówczas oczywiście gdy zawarty między niemi kąt θ zachowuje niezmienną wartość. Gdy jednak kąt ten staje się równym zeru lub 180^0, t. j. gdy, począwszy od pewnej chwili, powierzchnie p=const. i ρ=const. zlewają się ze sobą, natenczas włókno wirowe zachowuje niezmiennie w dalszym biegu czasu tę wartość momentu, którą aż do rozważanej chwili nabyło; ten stan niezmienny trwa dopóty, dopóki powierzchnie p i ρ nie zaczynają przecinać się ze sobą znowu wzdłuż linij wirowych, tworzących włókno. Opierając się na ogólnych równaniach hydrodynamicznych, możemy bez trudności prześledzić twierdzenia te matematycznie; dla uproszczenia rachunku możemy rozważać ruch dwuwymiarowy płynu. Równania ogólne (porów. Schütz'a, l. c.), wyrażające związek między składowemi prędkości wirowej a ich pochodnemi ze względu na czas, dają w tym przypadku szczególnym, — skoro „płaszczyznę ruchu“ obierzemy za płaszczyznę yz:

$$\eta = o,\ \zeta = o,\ \eta' = o,\ \zeta' = o,$$

$$\omega' = \xi' = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) - \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).^{1)} \tag{20}$$

Wszystkie powierzchnie stałego ciśnienia i stałej gęstości są w tym przypadku powierzchniami walcowatemi, prostopadłemi do płaszczyzny yz, tak iż normalne ich n, ν są wszędzie do płaszczyzny tej równoległe. Wprowadzając do równania (20) normalne n, ν i kąt $\theta = (n, \nu)$, otrzymujemy:

[1]) v, w oznaczają, jak zwykle, prędkości cząstek płynu w kierunku osi y, względnie z.

(21) $$\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta-\xi\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Równanie to możemy przekształcić, odpowiednio do naszych celów, pamiętając o tem, że rozmieszczenie przestrzenne prędkości cząstek płynu jest związane ze zmianą gęstości w czasie za pomocą równania ciągłości, które w naszym przypadku wymaga, aby było

(22) $$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w);$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ wyraża szybkość zmiany gęstości w nieruchomym elemencie przestrzeni. Rozumiejąc przez $\frac{d\rho}{dt}$ zmianę, zachodzącą w poruszającej się indywidualnej cząstce masy płynu, możemy zamiast równania (22) napisać:

(23) $$-\rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{d\rho}{dt}.$$

Podstawiając w równaniu (21) wartość wyrazu $\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$, wynikającą z równania (23), otrzymujemy:

(24) $$\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta+\xi\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

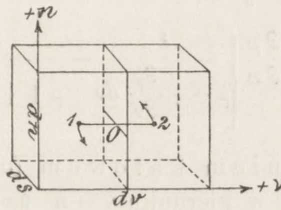
czyli, dzieląc obustronnie przez ρ:

(25) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right)=\frac{1}{2\rho^3}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta.$$

Ponieważ atoli gęstość ρ jest odwrotnie proporcyonalną do objętości, a więc, w rozważanym przypadku ruchu dwuwymiarowego, odwrotnie proporcyonalną do przekroju włókna wirowego, tak iż ξ/ρ różni się od momentu wirowego tylko o czynnik stały, przeto z równania (25) wynika istotnie, że moment włókna wirowego wówczas, i wówczas tylko, nie zależy od czasu, gdy powierzchnie p i powierzchnie ρ w ogóle zlewają się ze sobą albo też przynajmniej nie tworzą ze sobą linij przecięcia ani wewnątrz ani na powierzchni włókna wirowego. W przeciwnym przypadku moment wirowy zmienia się z czasem według prawa, które dla ruchu dwuwymiarowego np. wyraża wzór (25).

W końcu pragnąłbym jeszcze wykazać, w jaki sposób przy spełnieniu warunków wymienionych w twierdzeniu II powstaje m e c h a n i c z n i e ruch wirowy, z przyspieszeniem wirowem wyrażonem w równaniu (15). W tym celu pomyślmy, wewnątrz masy płynu doskonałego, nieskończenie mały równoległościan (fig. 2) o krawędziach dn, $d\nu$, ds; n, ν są to normalne do powierzchni stałego ciśnienia, względnie — stałej gęstości; ds jest elementem linii przecięcia tych powierzchni; kierunek ds jest więc prostopadłym do płaszczyzny dn, $d\nu$. Rozważajmy przypadek najprostszy, w którym kąt $\theta = (n, \nu)$ wynosi 90^0, tak iż równoległościan dn, $d\nu$, ds jest prostokątny. Podzielmy objętość $dn \,.\, d\nu \,.\, ds$ za pomocą płaszczyzny równoległej do ds, dn na dwie równe części. Jeżeli przeciętna gęstość płynu zawartego w równoległościanie jest ρ, możemy założyć, że części jego mają gęstości jednorodne: $\rho - \frac{\partial \rho}{\partial \nu}\frac{d\nu}{4}$, względnie $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \nu}\frac{d\nu}{4}$, równe dokładnym wartościom gęstości

Fig. 2.



w punktach środkowych: 1., względnie 2. (porów. fig. 2.). Wówczas masy tych części będą:

$$m_1 = \left(\rho - \tfrac{1}{4}\,\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu\right) ds\, dn\, \frac{d\nu}{2}, \tag{26}$$

$$m_2 = \left(\rho + \tfrac{1}{4}\,\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu\right) ds\, dn\, \frac{d\nu}{2}. \tag{27}$$

Owoż na każdą z dwóch części równoległościanu działa w kierunku $-n$ siła

$$N = \frac{\partial p}{\partial n}\, dn \,.\, ds\, \frac{d\nu}{2}. \tag{28}$$

Jeżeli pomyślimy sobie, że rozważane części płynu skrzepły (każda z osobna) i że całkowite ich masy m_1, m_2 ześrodkowały się w punktach środkowych 1, względnie 2, wówczas siły N udzielą punktom materyalnym 1, 2 w kierunku $-n$ przyspieszeń:

$$w_1 = N : m_1 = \frac{\partial p}{\partial n} : (\rho - \tfrac{1}{4} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\nu), \tag{29}$$

$$w_2 = N : m_2 = \frac{\partial p}{\partial n} : (\rho + \tfrac{1}{4} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\nu), \tag{30}$$

tak iż będzie $| w_1 | > | w_2 |$. Jeżeli położymy

$$w_1 = w_0 + \tfrac{1}{2} (w_1 - w_2), \tag{31}$$

$$w_2 = w_0 - \tfrac{1}{2} (w_1 - w_2), \tag{32}$$

ilość w_0 będzie przyspieszeniem ruchu p o s t ę p o w e g o $[w_0 = \tfrac{1}{2} (w_1 + w_2)]$ punktu środkowego O całego równoległościanu w kierunku $-n$, wyraz zaś

$$\tfrac{1}{2} (w_1 - w_2) : \tfrac{1}{4} d\nu = 2 (w_1 - w_2) : d\nu, \tag{33}$$

t. j., według (29) i (30), wyraz

$$2 (w_1 - w_2) : d\nu = 2 \frac{\partial p}{\partial n} \left\{ \frac{1}{\rho - \frac{1}{4} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\nu} - \frac{1}{\rho + \frac{1}{4} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\nu} \right\} : d\nu = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \tag{34}$$

będzie p r z y s p i e s z e n i e m k ą t o w e m (obrotowem) układu punktów materyalnych 1, 2 w kierunku $\nu \rightarrow n$ naokoło osi przechodzącej przez punkt O (połowiący odległość $\overline{12}$) i równoległej do ds, czyli w istocie podwójną wartością p r z y s p i e s z e n i a w i r o w e g o ω' w punkcie O, co było do dowiedzenia. Zupełnie podobnie otrzymujemy w przypadku ogólnym, w którym powierzchnia p tworzy z powierzchnią ρ jakikolwiek kąt θ, wyraz (34) pomnożony przez sin θ, zgodnie z twierdzeniem II.

Twierdzenia powyższe wyprowadziłem i podałem li tylko jako wnioski matematyczne, wynikające z warunków mechanicznych płynu doskonałego, podlegającego działaniu sił zachowawczych. Innem zupełnie pytaniem, którego tutaj roztrząsać nie będziemy, jest pytanie tyczące się warunków fizycznych istnienia rzeczywistych linij przecięcia powierzchni p i powierzchni ρ. Zdaje się, iż z góry, t. j. bez odpowiednich badań ścisłych, tyle tylko możnaby powiedzieć, że, gdybyśmy w masie płynu o wspomnianych własnościach wytworzyli w jakikolwiekbądź sposób takie rozmieszczenie ciśnienia i gęstości, wobec którego powierzchnie p przecinałyby się z powierzchniami ρ, dając początek nowym wirom, i gdybyśmy następnie pozostawili płyn samemu sobie, owe wymuszone rozmieszczenia już po upływie bardzo krótkiego czasu zmieniłyby się tak, iż wszystkie powierzchnie p znowu zlewałyby się z odpowiedniemi powierzchniami ρ. Od tej chwili zaś nowe wiry nadal tworzyć się nie będą, a momenty włókien wirowych, które wytworzyły się w ciągu tego krótkiego czasu, zachowywać będą wartości swe niezmiennie.