Do teoryi szeregów potęgowych.

Napisał

Józef Puzyna.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału mat. przyr. d. 1 czerwca 1896 r.; ref. czł. Mertens.

W tej rozprawie rozważam zachowanie się szeregów potęgowych $\mathfrak{P}(x)$ na ich okręgach zbieżności (r), określając tam — oprócz rozbieżności, bezwarunkowej, warunkowej lub wahającej zbieżności — jeszcze n i e p r z y d a t n o ś ć szeregu [ust. I].

W ustępie II. odróżniam od siebie dwa różne zupełnie zadania, a mianowicie: 1) zbadanie, jak się zachowuje szereg w pewnym punkcie a' swego okręgu zbieżności (r), i 2) właściwe określenie wartości szeregu w tym punkcie. Przy tej sposobności — po wyłączeniu przypadku, w którym szereg w punkcie a' okazuje się nieprzydatnym — przyjmując jego rozbieżność ($|\mathfrak{P}(a')| = \infty$) podaję dowód, że taki punkt a' jest zawsze szczególnym punktem. W dalszym ciągu udowodniam, że każdy punkt szczególny a' (jakkolwiek się objawiający) jest również szczególnym tak szeregu pochodnego, jak pierwotnego (całkowego).

W III. wreszcie ustępie znajdują się metodycznie utworzone szeregi tego rodzaju, że na swym okręgu zbieżności są jednakowego zachowania się w pewnej, dobrze określonej pantachicznie na tym okręgu rozłożonej mnogości punktów.

Między nimi zawierają się i takie, które będąc w wspomnianej mnogości bezwarukowo zbieżnymi lub stanowczo rozbieżnymi (a nie nieprzydatnymi) określają funkcyę istniejącą jedynie wewnątrz koła (r), (nie dającą się wyprowadzić poza to koło).

Czy za pośrednictwem utworzonych w tym ustępie szeregów możliwem potem będzie przejść do szeregu, który w każdym dowolnym punkcie swego okręgu zbieżności (r) miałby być rozbieżnym, nieprzydatnym, albo wahającym się na wzór szeregu, jaki Pringsheim utworzył, mając jedynie warunkową zbieżność na uwadze, — tego pytania tutaj nie rozstrzygam.

Zachowanie się szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x) = \Sigma c_\lambda x^\lambda$ na jego obwodzie zbieżności (r) określają zwykle w ten sposób:

Szereg na swoim (prawdziwym) okręgu zbieżności jest albo we wszystkich punktach bezwarunkowo zbieżny, albo z zupełnem wykluczeniem bezwarunkowej zbieżności, jest jużto rozbieżny, jużto warunkowo zbieżny [1]).

Lecz to określenie jest niedokładnem o tyle, że

1) do rozbieżności zaliczają wahającą zbieżność szeregu, jak to mamy n. p. w szeregu $1+x+x^2+\ldots$ dla $x=-1$, w którymto wypadku dostajemy $1-1+1-1+1-1+\ldots.$

2) do rozbieżności zaliczają nieprzydatność szeregu, charakteryzującą się w ten sposób:

Gdy a' jest punktem na obwodzie (r), a położymy $\mathfrak{P}(a') = P + Qi$, to może się zdarzyć, że w pierwszorzędnej części P, lub w drugorzędnej części Qi, (lub w obydwu równocześnie) dodajniki zdążają i do granicy $+\infty$ i do granicy $-\infty$. $\mathfrak{P}(a')$ jest zatem wielkością nieoznaczoną i z tego-to powodu uznać go raczej trzeba za szereg nieprzydatny, a nie rozbieżny.

Takim jest n. p. szereg

$$1+\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)x+\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x^2+\ldots.$$

w którym α jest dodatne i skończone, a który jest zbieżny dla $|x|<1$. Ponieważ

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)=\infty,$$

---

[1]) Por. Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*. str 212 i nast. O. Biermann. *Elemente der höheren Mathematik*. str. 370 i nast.

więc w punkcie $x = +1$ mamy rozbieżność, a w punkcie $x = -1$ (i we wszystkich innych punktach okręgu — oprócz punktu $x = +1$) mamy nieprzydatność.

Takie zachowanie się szeregów potęgowych na okręgu (r) jest wynikiem znanego twierdzenia tej treści:

Gdy dla $|x| = \xi$, *wszystkie dodajniki* $|c_\lambda|\,\xi^\lambda$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots.$, *są skończone, a więc posiadają pewną skończoną granicę* g, *to szereg* $\mathfrak{P}(x)$ *dla wszelkich* x *mających wartości bezwzględne* $|x| = \xi_0 < \xi$ *jest zbieżny.*

Tak określona wielkość ξ posiadać musi pewną górną granicę r odznaczającą się tem, że wszystkie dodajniki

$$\alpha)\qquad |c_\lambda|\,(r-\varepsilon)^\lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

przy dowolnie małem dodatnem ε, będą skończone; dodajniki zaś

$$\beta)\qquad |c_\lambda|\,(r+\varepsilon)^\lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

przy takiem samem ε, **nie wszystkie** już będą skończone.

Co się tyczy samych dodajników

$$\gamma)\qquad |c_\lambda|\,r^\lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots,$$

to te zaliczać się mogą albo do α), albo już do β), gdyż granica sama nie potrzebuje należeć do zdefiniowanych wielkości.

W pierwszy razie może być szereg dany na okręgu (r) już-to bezwarunkowo, już-to warunkowo, albo wahająco zbieżnym, albo wreszcie rozbieżnym w ten sposób, że wszystkie dodajniki pozostają skończone.

W drugim razie na okręgu (r) będzie szereg już-to nieprzydatny już-to rozbieżny w ten sposób, że dodajniki **nie wszystkie** są skończone.

Tak w pierwszym jak drugim razie nie jest wykluczone **jednakowe** zachowanie się szeregu **na całym** okręgu (r).

II.

Zbadanie zachowania się szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x)$ w pewnym punkcie a' na okręgu zbieżności (r), a określenie wartości jego w tym punkcie, są to dwa zupełnie różne zadania. O ile są one czasem identyczne — wyświecą następujące uwagi:

Gdy a' **jest punktem nieszczególnym**, to znajdzie się bardzo dużo przeprowadzeń $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ takich, że w ich zakresach zbieżności (r) ten punkt a' zawierać się będzie. Jedno z takich przeprowadzeń weźmy pod uwagę.

I. Jeżeli $\mathfrak{P}(a')$ jest warunkowo, albo wahająco zbieżnym, albo wreszcie nieprzydatnym szeregiem, to niewiadomo, jaką w tych 3 wypadkach nadać wartość tym formom nieoznaczonym.

Lecz wtedy — ponieważ we wspólnej części kół (r), (r') można $\mathfrak{P}(x)$ zdefiniować także przez $\mathfrak{P}(x \mid a)$, więc zatrzymując tę definicyę i w punkcie a' określimy

$$\mathfrak{P}(a') = \mathfrak{P}(a' \mid a).$$

To znaczy:

A. *Gdy punkt a' jest punktem nieszczególnym na okręgu (r), a $\mathfrak{P}(a')$ jest szeregiem warunkowo, albo wahająco zbieżnym, albo też nieprzydatnym, to $\mathfrak{P}(a')$ określamy przez $\mathfrak{P}(a' \mid a)$, gdzie $\mathfrak{P}(x \mid a)$ jest dowolnem przeprowadzeniem o punkcie a leżącym w (r), a o kole zbieżności (r') mieszczącem w sobie punkt a'.*

Według tego szereg $P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ dający w punkcie $x = -1$ wahająco zbieżne rozwinięcie: $(+1-1+1-1+\ldots)$ określić można wartością przeprowadzenia

$$\mathfrak{P}(x \mid -\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{x+\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^2} + \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(1+\frac{1}{2})^3} + \ldots$$

w tym punkcie. Z niego dostajemy

$$\mathfrak{P}(-1 \mid -\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \quad \text{a więc}$$

$$\mathfrak{P}(-1) = \tfrac{1}{2},$$

$$\text{a to zgodne jest z } \left[\frac{1}{1-x}\right]_{x=-1} = \tfrac{1}{2}.$$

Szereg

$$\mathfrak{P}(x) = (1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \ldots$$

daje, przy $\mu < -1$, w punkcie $x = +1$ nieprzydatne rozwinięcie

$$1 + \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} + \binom{\mu}{3} + \ldots$$

gdyż $\lim\limits_{r=\infty} \binom{\mu}{r} = \pm\infty$.

Gdy jednak zważymy, że przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x \mid \frac{1}{2})$ zawiera w swem kole zbieżności $(r') = (\frac{3}{2})$ punkt $x = +1$, określimy $\mathfrak{P}(1)$ równaniem

$$\mathfrak{P}(1) = \mathfrak{P}(1 \mid \tfrac{1}{2}) = 2^\mu.$$

Zatrzymując nadal założenie, że a' jest nieszczególnym punktem, przypuśćmy, że

II. $\mathfrak{P}(a')$ jest bezwarunkowo zbieżnym szeregiem. Wtedy trzeba sprawdzić, czy i tu $\mathfrak{P}(a') = \mathfrak{P}(a' \mid a)$, gdzie $\mathfrak{P}(x \mid a)$ jest znowu jednem z przeprowadzeń o kole zbieżności (r') mieszczącem w sobie punkt a'.

Niech x' będzie punktem leżącym wewnątrz (r), ale nieskończenie blisko punktu a'. Tem samem leży już x' równocześnie i w kole (r').

Pisząc:

$$\mathfrak{P}(a') = \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda a'^\lambda + \sum_{\lambda=n}^{\infty} c_\lambda a'^\lambda$$

$$\mathfrak{P}(x') = \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda x'^\lambda + \sum_{\lambda=n}^{\infty} c_\lambda x'^\lambda,$$

mamy stąd:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}(a') - \mathfrak{P}(x') = \\ \left[\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda a'^\lambda - \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda x'^\lambda \right] + \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} c_\lambda a'^\lambda - \sum_{\lambda=n}^{\infty} c_\lambda x'^\lambda \right]. \end{array} \right.$$

Gdy δ jest ilością dowolnie małą dodatną, to zawsze jest możliwe — przy dostatecznie wielkiem n — uzyskać równocześnie nierówności:

$$\text{a)} \quad \left| \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda a'^\lambda - \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda x'^\lambda \right| < \frac{\delta}{2}$$

$$\text{b)} \quad \left| \sum_{\lambda=n}^{\infty} c_\lambda a'^\lambda - \sum_{\lambda=n}^{\infty} c_\lambda x'^\lambda \right| < \frac{\delta}{2}.$$

W a) mamy bowiem różnicę dwóch wartości tej samej wymiernej całkowitej funkcyi w dwóch nieskończenie bliskich miejscach: a', x'; w b) występuje znowu różnica reszt dwóch absolutnie zbieżnych szeregów.

Wskutek tego dostaniemy z (1):

$$(2) \quad | \mathfrak{P}(a') - \mathfrak{P}(x') | < \delta.$$

Lecz z drugiej strony można punkt x' — pozostawiając go ciągle nieskończenie blisko punktu a' — wybrać tak, że równocześnie z nierównością (2) mieć będziemy i nierówność:

$$| \mathfrak{P}(a' \mid a) - \mathfrak{P}(x' \mid a) | < \delta.$$

Połóżmyż — jeżeli ε, ε', ε_1, ε'_1 są ilości nieskończenie małe, według potrzeby, dodatne lub odjemne:

$$\mathfrak{P}(a') \quad - \mathfrak{P}(x') \quad = \varepsilon + \varepsilon' i$$
$$\mathfrak{P}(a' \mid a) - \mathfrak{P}(x' \mid a) = \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 i,$$

to stąd — uwzględniając, że identycznie jest $\mathfrak{P}(x') = \mathfrak{P}(x' \mid a)$, gdyż x' zawiera się równocześnie w kołach (r), (r') — dostaniemy

(3) $$\mathfrak{P}(a') - \mathfrak{P}(a' \mid a) = (\varepsilon - \varepsilon_1) + (\varepsilon' - \varepsilon'_1) i.$$

Lecz $\mid (\varepsilon - \varepsilon_1) + (\varepsilon' - \varepsilon'_1) i \mid$ uczynić można mniejszem od dowolnie małej dodatnej ilości δ_1. Wskutek tego z (3) wyniknie

$$\mid \mathfrak{P}(a') - \mathfrak{P}(a' \mid a) \mid < \delta_1 .$$

Lecz tu lewa strona nie zależy ani od δ, ani od δ_1, ani od zmiennego punktu x'; skutkiem tego możliwem jest jedynie

$$\mathfrak{P}(a') - \mathfrak{P}(a' \mid a) = 0,$$

a to znaczy:

B. *Gdy $\mathfrak{P}(a')$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym, a a' jest nieszczególnym punktem i leży w kole zbieżności (r') przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x \mid a)$, to identycznie jest $\mathfrak{P}(a') = \mathfrak{P}(a' \mid a)$.*

W tym więc wypadku jest podstawienie $x = a'$ w szeregu $\mathfrak{P}(x)$, zarazem określeniem jego wartości (jeżeli a' nie jest punktem szczególnym).

III. Załóżmy, że $\mathfrak{P}(a')$ jest szeregiem rozbieżnym bez różnicy, czy dodajniki $\mid c_\lambda a'^\lambda \mid$ są wszystkie skończone, czy dążą do granicy nieskończonej. O samym punkcie a' nie zakładamy z góry, czy jest szczególnym, lub nieszczególnym.

Połóżmy

$$c_\lambda = a_\lambda + b_\lambda i, \qquad x = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

to dostaniemy

$$\mathfrak{P}(x) = P_1(\rho) + P_2(\rho) i,$$

gdzie P_1, P_2 są-to szeregi potęgowe rzeczywistego argumentu ρ o rzeczywistych spółczynnikach zależnych od parametru φ.

Niech będzie

$$P_1(\rho) = U_1(\rho) - V_1(\rho)$$
$$P_2(\rho) = U_2(\rho) - V_2(\rho),$$

gdzie U_1, U_2 są sumami samych dodatnych, a V_1, V_2 sumami samych odjemnych wyrazów, zawartych w P_1, P_2, to dalej mamy:

$$| P(x) | = \sqrt{[U_1(\rho) - V_1(\rho)]^2 + [U_2(\rho) - V_2(\rho)]^2}.$$

Z rozbieżności szeregu $P(a')$ wynika $| P(a') | = +\infty$.

Połóżmy

$$a' = r(\cos\psi + i\sin\psi),$$

to jasnem jest, że dla $\rho = r$, $\varphi = \psi$ w jednej przynajmniej z pomiędzy par

$$p_1)\ (U_1,\ V_1),\quad p_2)\ (U_2,\ V_2)$$

jeden (i tylko jeden) z szeregów staje się nieskończonością. Lecz te szeregi są o dodajnikach jednakowego znaku $+$. Stąd wynika, że gdy się ρ dowolnie przybliża do r (pozostając $< r$), a φ pozostawiamy $= \psi$, to z szeregów p_1), p_2) te, które dla $\rho = r$ i $\varphi = \psi$ stają się nieskończonościami, mogą być większe od dowolnie wielkiej danej dodatnej ilości G'.

Za zbliżaniem się ρ do r, przy $\varphi = \psi$, dostajemy w (r) punkt x' nieskończenie bliski punktu a', a $| \mathfrak{P}(x') |$ będzie również mogło być większe od dowolnie wielkiej dodatnej ilości G. Mamy więc twierdzenie:

C. *W punktach x' zawartych w (r), a tworzących otoczenie takiego punktu a', w którym $P(a')$ jest rozbieżnym (a nie wahającym, albo nieprzydatnym) szeregiem, przybiera $| P(x') |$ także i wartości większe od każdej dowolnie wielkiej skończonej, dodatnej ilości G.*

Przyjmijmy teraz, że punkt a' (dający $| P(a') | = +\infty$), jest punktem nieszczególnym.

W takim razie istnieje niezawodnie pewne przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x\ a|)$, w którego kole zbieżności (r') mieści się punkt a'. Gdy więc x' jest dowolnym punktem zawartym równocześnie w (r) i (r'), to ma być identycznie:

$$\mathfrak{P}(x') = \mathfrak{P}(x' \mid a). \tag{4}$$

Lecz — gdy x', pozostając w (r) i (r') dowolnie się zbliży do a' — to identyczność (4) stanie się niemożliwą, bo $\mathfrak{P}(x' \mid a)$ dowolnie mało różni się od $\mathfrak{P}(a' \mid a)$, a $| \mathfrak{P}(x') |$ może być dowolnie wielkie. Z tego powodu założenie, że punkt a' nie jest punktem szczególnym, musi być fałszywe, a stąd twierdzenie:

D. *Każdy punkt a' na okręgu (r) taki, że w nim $\mathfrak{P}(a')$ jest szeregiem rozbieżnym, jest punktem szczególnym szeregu $\mathfrak{P}(x)$.*

O ile mi wiadomo, takiego twierdzenia w jego ogólnej formie nigdzie nie wypowiedziano; i istotnie niemożliwem jest dojść do niego, jeżeli się wprzód rozbieżności szeregu w punktach a' jego koła zbieżności (r) nie podzieli na trzy mogące się zdarzyć rodzaje, a to: 1) rozbieżność bezwzględną, 2) nieprzydatność i 3) zbieżność wahającą. W dwóch ostatnich przypadkach punkt a' wcale nie potrzebuje (ale może) być punktem szczególnym.

W szeregu n. p.

$$P(x)=(1+x)^\mu = 1+\binom{\mu}{1}x+\dots,\quad \mu < -1,$$

mamy na całym okręgu $(r)=(1)$ nieprzydatność oprócz punktu $x=-1$, w którym $\mathfrak{P}(x)$ staje się rozwinięciem rozbieżnem. Żaden punkt a' okręgu (1) nie będzie tu szczególnym z wyjątkiem punktu $x=-1$, w którym $P(-1)$ jest rozbieżne, i który dlatego — podług tw. D musi być szczególnym.

Gdy $\mu=-1$, to szereg $(1+x)^{-1}=1-x+\dots$ będzie na całym okręgu $(r)=(1)$ wahająco zbieżny, a w punkcie $x=-1$ rozbieżny. Wskutek tego musi być $x=-1$ punktem szczególnym, jak to jest w rzeczywistości.

Zauważymy nakoniec, że M. Lerch tworząc szereg o wszędzie gęstej (pantachicznej) mnogości punktów szczególnych na całym jego obwodzie zbieżności (*Un théorème de la théorié des sevies. Acta mathematica*. T. 10. str. 87) opiera się właśnie na twierdzeniach C i D, stosując je bez dowodu [1]).

W następującym ustępie zajmować się będziemy tworzeniem takich szeregów, które w pewnej wszędzie gęstej mnogości punktów okręgu (r) zachowywać się będą jednakowo. W tym celu udowodnimy tu twierdzenia, z których tam korzystać nam przyjdzie.

Załóżmy, że szereg $\mathfrak{P}(x)=\Sigma c_\lambda x^\lambda$ ma — jak przódy — zakres zbieżności (r), a punkt szczególny a'. Na promieniu oa', gdzie 0 jest

[1]) Kładzie on $x=e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s}+\alpha i\right)}$, gdzie a jest dowolną całkowitą liczbą, zaś α dowolną dodatną i rzeczywistą ilością, a czynnik $e^{-\pi\alpha}$ wprowadza na to, aby — zbliżając się za pomocą niego ($\lim \alpha=0$) do punktów okręgu koła zbieżności — wykazać, że szereg zachowuje się podług twierdzenia C, a więc i D.

środkiem koła r (punktem $x=0$), weźmy dowolny punkt a i utwórzmy przeprowadzenie

$$(5) \qquad \mathfrak{P}(x \mid a) = \mathfrak{P}(a) + \frac{\mathfrak{P}'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\mathfrak{P}''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots..$$

to takowe będzie zbieżnem w zakresie

$$| x-a | < r - | a | .$$

Zakres ten jest - to koło $(a)_r$, które ma środek w punkcie a, a okręgiem swym dotyka wewnętrznie koła (r). Koło to jest zarazem prawdziwym zakresem zbieżności przeprowadzenia (5).

Zauważmy szereg pochodny

$$\mathfrak{P}'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots\ldots,$$

który — jak wiadomo — w kole (r), jako prawdziwym swym zakresie zbieżności, jest zbieżny i utwórzmy przeprowadzenie jego

$$(6) \qquad \mathfrak{P}'(x \mid a) = \mathfrak{P}'(a) + \frac{\mathfrak{P}''(a)}{1!}(x-a) + \frac{\mathfrak{P}'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots.,$$

to porównywając iloczyn

$$(7) \qquad (x-a)\mathfrak{P}'(x \mid a) = \mathfrak{P}'(a)(x-a) + \frac{\mathfrak{P}''(a)}{1!}(x-a)^2 + \frac{\mathfrak{P}'''(a)}{2!}(x-a)^3 + \ldots..$$

ze szeregiem (5), łatwo poznamy, że i szereg (7) — a tem samem i szereg (6) — ma również koło $(a)_r$, a nie większe, jako swój zakres zbieżności.

Porównajmy bowiem dodajniki

$$a_1) \qquad \frac{\mathfrak{P}'(a)}{1!}(x-a),\ \frac{\mathfrak{P}''(a)}{2!}(x-a)^2,\ \frac{\mathfrak{P}'''(a)}{3!}(x-a)^3, \ldots..$$

szeregu (5), z odpowiednimi dodajnikami

$$b_1) \qquad \mathfrak{P}'(a)(x-a),\ \frac{\mathfrak{P}''(a)}{1!}(x-a)^2\ \frac{\mathfrak{P}'''(a)}{2!}(x-a)^3, \ldots..$$

szeregu (7), to zaraz dostrzeżemy, że bezwzględne wartości wyrazów b_1) są większe od bezwzględnych wartości wyrazów a_1). To dowodzi, że szeregi (6), (7) są tem bardziej rozbieżne dla $| x-a | > r - | a |$, gdy szereg (5) — jak założono — jest w tym zakresie rozbieżny.

Lecz zbieżność przeprowadzenia $\mathfrak{P}'(x \mid a)$ w kole $(a)_r$, a nie większem, jest dostatecznym warunkiem, aby punkt a' był szczególnym szeregu $\mathfrak{P}'(x)$, a stąd wynika:

E. *Jeżeli dany szereg* $\mathfrak{P}(x)$ *ma punkt szczególny* a' *na swoim okręgu zbieżności* (r), *to ten punkt jest również szczególny dla szeregu pochodnego* $\mathfrak{P}'(x)$.

Zbadajmy, czy i o ile to twierdzenie da się odwrócić.

Przyjmijmy, że szereg pochodny $\mathfrak{P}'(x)$ ma punkt szczególny a'. Wtedy — gdy punkt a leży znowu na promieniu oa' — dostajemy przeprowadzenie (6) zbieżne w kole $(a)_r$, a nie większem. Przeprowadzenie szeregu $\mathfrak{P}(x)$ do otoczenia punktu a ma postać (5) i jest zbieżne w temże samem kole, co jego pochodna

$$\frac{d\,\mathfrak{P}(x \mid a)}{d(x-a)} = P'(a) + \frac{\mathfrak{P}''(a)}{1!}(x-a) + \frac{\mathfrak{P}'''(x)}{2!}(x-a) + \ldots.. \tag{8}$$

Jest to rozwinięcie identyczne z (6), ma więc koło $(a)_r$ jako prawdziwy zakres zbieżności. Że zaś pierwotny szereg ze swym pochodnym ma — jak wiadomo — zawsze ten sam zakres zbieżności, więc stąd wynika, że pierwotny szereg (5) szeregu (8) będzie zbieżny w kole $(a)_r$, a nie w większem. To jest jednak dostatecznym warunkiem, aby szereg $P(x)$ na swem kole zbieżności (r) posiadał rownież punkt szczególny a'. Mamy więc twierdzenie:

F. *Gdy szereg* $\mathfrak{P}'(x)$ (*jako pochodny*) *ma punkt szczególny* (a') *na swym okręgu zbieżności, to ten sam punkt jest szczególnym i szeregu pierwotnego* $\mathfrak{P}(x)$.

Jest to odwrócenie twierdzenia E, a obydwa twierdzenia E, F możemy w ten sposób wyrazić:

G. *Gdy szereg* $\mathfrak{P}(x)$ *ma punkt szczególny* a', *to każdy jego szereg pierwotny* (*całkowy*) *i pochodny dowolnego rzędu posiada punkt szczególny* a'. Naodwrót: *Gdy utworzymy z* $\mathfrak{P}(x)$ *szeregi pierwotne i pochodne i stwierdzimy, że* a' *jest szczególnym punktem pierwotnego, albo pochodnego szeregu dowolnego rzędu, to* $\mathfrak{P}(x)$ *ma niezawodnie punkt szczególny* a'.

III.

Gdy $\mathfrak{P}(x) = \Sigma c_\lambda x^\lambda$ ma skończony promień zbieżności $r \gtrless 1$, a położymy $x = rz$, to dostaniemy szereg

$$\mathfrak{P}_1(z) = c_0 + (c_1\, r)\, z + (c_2\, r^2)\, z^2 + \ldots..$$

już o zakresie zbieżności $|\, z \,| < 1$. Z tego powodu możemy — nie narażając się na ograniczenie ogólności — rozważać odtąd w y ł ą c z n i e szeregi o kole zbieżności $(r) = [\,1\,]$.

Trzymając się tego, zauważmy szereg

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + c_3 x^{m_3} + (m_0 = 1) \ldots$$

o takich wykładnikach

(1) $$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\ldots, \lim m_s = \infty, \quad (m_0 = 1)$$

że m_s jest dzielnikiem wszystkich wykładników następnych; $s = 1, 2, 3, \ldots$

Połóżmy

(2) $$x = e^{\frac{2k\pi i}{m_s}},$$

gdzie k jest dowolną, dodatną, całkowitą liczbą, a m_s jednym z obranych wykładników (1).

Dalej niech będzie $\xi = e^{\varphi i}$ dowolnym punktem na okręgu zbieżności. Obrawszy dowolnie małą, dodatną ilość δ, możliwem będzie zawsze przy dostatecznie wielkim m_s (dostatecznie wielkim s) w naturalnym szeregu liczb $1, 2, 3, \ldots\ldots$ znaleźć taką liczbę h, że się okaże

$$\frac{2h\pi}{m_s} < \varphi < \frac{(2h+1)\pi}{m_s},$$

a równocześnie z tem będzie

$$\pi\left(\frac{2h+1}{m_s} - \frac{2h}{m_s}\right) = \frac{\pi}{m_s} < \delta.$$

Możliwem więc jest, biorąc $k = h$, i obierając dostatecznie wielkie m_s, postacią (2) określić nieskończenie wiele punktów na nieskończenie małym łuku, otaczającym dowolny punkt ξ.

Mając to, wstawmy (2) w dany szereg $\mathfrak{P}(x)$, to dostaniemy

$$\mathfrak{P}\left(e^{\frac{2k\pi i}{m_s}}\right) = \sum_{\lambda=o}^{s-1} c_\lambda \cdot e^{2k\pi i \cdot \frac{m_\lambda}{m_s}} + \sum_{\lambda=s}^{\infty} c_\lambda \cdot e^{2k\pi i \cdot \frac{m_\lambda}{m_s}}.$$

Lecz w drugiej sumie mamy, według naszego założenia, zawsze

$$\frac{m_\lambda}{m_s} = \text{liczbie całej, gdyż } \lambda = s,\ s+1,\ s+2, \ldots\ldots$$

Stąd wynika, że

$$e^{2k\pi i \cdot \frac{m_\lambda}{m_s}} = 1, \quad k = s,\ s+1,\ s+2, \ldots\ldots$$

i że więc

$$\mathfrak{P}\left(e^{\frac{2k\pi i}{m_s}}\right) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} c_\lambda \, e^{\frac{2k\pi i}{m_s} m\lambda} + [\, c_s + c_{s+1} + c_{s+2} + \ldots\ldots] \tag{3}$$

W ten sposób postępuje właśnie Lerch w wspomnianej rozprawie, tworząc szereg o pantachicznej mnogości punktów szczególnych na całym okręgu [*1*]. Założywszy bowiem, że $(c_s + c_{s+1} + e_{s+2} + \ldots)$, albo — co na jedno wyjdzie — że $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$) jest szeregiem rozbieżnym, dostaje ze szeregu $\mathfrak{P}(x)$ inny szereg taki, że w nieskończenie wielu punktach dowolnego łuczku okręgu [*1*] jest rozbieżny, a więc — podług naszego twierdzenia D — posiada na całym okręgu [*1*] wszędzie gęstą mnogość punktów szczególnych [1]).

Lecz — nie troszcząc się o punkta szczególne — ale o zachowanie się szeregu na kole [*1*], wnioskujemy z równania (3), że dany szereg $\mathfrak{P}(x)$ w pantachicznej mnogości punktów

$$e^{\frac{2\pi ki}{m_s}}, \qquad \begin{aligned} k &= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \\ s &= 1, 2, 3, \ldots\ldots \end{aligned} \tag{A}$$

rozłożonych na całem kole [*1*] tak zachowywać się będzie, jak $(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots\ldots)$.

Zauważmy teraz punkty

$$e^{\frac{k\pi i}{m_s}}, \qquad \begin{aligned} k &= 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots \\ s &= 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \end{aligned} \tag{B}$$

które na kole [*1*] tworzą znowu mnogość pantachiczną odmienną od mnogości (A), to otrzymamy:

$$\mathfrak{P}\left(e^{\frac{k\pi i}{m_s}}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \, . \, e^{\frac{k\pi i}{m_s} m\lambda}. \tag{4}$$

Połóżmy

$$\begin{aligned}
m_{s+1} &= m_s \quad . \ \tau_{s+1} \\
m_{s+2} &= m_{s+1} \, . \ \tau_{s+2} = m_s \, . \ \tau_{s+1} \, . \ \tau_{s+2} \\
m_{s+3} &= m_{s+2} \, . \ \tau_{s+3} = m_s \, . \ \tau_{s+1} \, . \ \tau_{s+2} \, . \ \tau_{s+3} \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

[1]) Samo przez się rozumie się, że pantachiczna mnogość punktów szczególnych na okręgu [1] powoduje, że każdy dowolny punkt tego okręgu, nie należący do mnogości będzie również szczególnym.

a więc

$$\frac{m_{s+1}}{m_s}=\tau_{s+1}=t_{s+1}$$

$$\frac{m_{s+2}}{m_s}=\tau_{s+1}\cdot\tau_{s+2}=t_{s+2}$$

$$\frac{m_{s+3}}{m_s}=\tau_{s+1}\cdot\tau_{s+2}\cdot\tau_{s+3}=t_{s+3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

to widocznie, jeżeli t_{s+1} jest parzyste, już wszystkie następujące: t_{s+2}, t_{s+3}, ... będą również parzyste. Jeżeli t_{s+1} jest nieparzyste, to albo równocześnie wszystkie następujące: t_{s+2}, t_{s+3}, ... są nieparzyste, albo, gdy znajdzie się t_σ, $\sigma > s+1$, parzyste, to już i wszystkie następujące: $t_{\sigma+1}$, $t_{\sigma+2}$, ... będą bez wyjątku parzyste.

W każdym więc razie, od pewnego dostatecznie wielkiego σ, poczynając, dają

$$(-1)^{t_\sigma}, (-1)^{t_{\sigma+1}}, (-1)^{t_{\sigma+2}}, \ldots\ldots$$

statecznie $+1$, albo -1.

Wskutek tego pisząc (4) w postaci

$$\mathfrak{P}\left(e^{\frac{k\pi i}{m_s}}\right)=\sum_{\lambda=0}^{\sigma-1} c_\lambda\, e^{\frac{k\pi i}{m_s}m_\lambda}+\sum_{\lambda=\sigma}^{\infty} c_\lambda\, e^{k\pi i t_\lambda}$$

i kładąc $e^{k\pi i t_\lambda}=\varepsilon$, gdzie $\varepsilon=+1$, albo $=-1$ według potrzeby, a $\lambda=\sigma$, $\sigma+1$, $\sigma+2$, ... dostajemy:

$$\mathfrak{P}\left(e^{\frac{k\pi i}{m_s}}\right)=\sum_{\lambda=0}^{\sigma-1} c_\lambda\, e^{\frac{k\pi i}{m_s}m_\lambda}+\varepsilon\left[c_\sigma+c_{\sigma+1}+c_{\sigma+2}+\ldots\ldots\right].$$

Z tego widać, że i na punktach mnogości (B) zachowuje się szereg zawsze w jednakowy sposób, czyli w taki, jak $c_0+c_1+c_2+\ldots\ldots$

Obie mnogości (A), (B) tworzą razem jednę, wszędzie gęstą mnogość

$$\text{(M)}\qquad x=e^{\frac{k\pi i}{m_s}},\quad \begin{array}{l} k=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots\ldots \\ s=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots\ldots \end{array}$$

a szereg w każdym jej punkcie wykazuje statecznie to samo zachowanie się.

W ten sposób uzyskaliśmy zatem metodę tworzenia szeregów o jednakowem zachowaniu się w pewnej dobrze określonej pantachicznej mnogości punktów na całym okręgu koła [*1*].

Szeregi posiadające tę własność, nazywać będziemy krótko szeregami o pantachicznem zachowaniu się (na kole [*1*]).

Naznaczmy pantachiczną nieprzydatność szeregu przez Z_n, jego pant. rozbieżność przez Z_r, jego pant. warunkową zbieżność przez Z_w, pant. wahającą (oscylującą) zbieżność przez Z_0, a pant. bezwarunkową zbieżność przez Z_b, to możemy teraz tworzyć dowolnie wiele szeregów należących do jednej z tych pięciu kategoryj. Tak n. p. szereg:

$$1-\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)x^2+\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x^{2^2}+ \qquad a_1)$$

$$+\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)x^{2^3}-\ldots\ldots$$

o rzeczywistem dodatnem α, jest zachowania się Z_n.

Szeregi:

$$1+\left(1+\frac{1}{1}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)x^{2^2}+ \qquad a_2)$$

$$+\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)x^{2^3}+\ldots\ldots$$

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^{2^3}+\frac{1}{4}x^{2^4}+\ldots\ldots \qquad b_2)$$

$$1+x^2+x^{2^2}+x^{2^3}+\ldots\ldots \qquad c_2)$$

są zachowania się Z_r.

Szeregi:

$$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^{2^3}-\frac{1}{4}x^{2^4}+\ldots\ldots \qquad a_3)$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x^{2^3}-\frac{1}{\sqrt{4}}x^{2^4}+\ldots\ldots \qquad b_3)$$

są zachowania się Z_w.

Szeregi:

$$1-x^2+x^{2^2}-x^{2^3}+x^{2^4}-\ldots\ldots \qquad a_4)$$

$$\text{b}_4)\quad 2-\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)x^{2^2}-\left(1-\frac{1}{2^3}\right)x^{2^3}+$$
$$+\left(1+\frac{1}{2^4}\right)x^{2^4}-\ldots\ldots$$

są zachowania się Z_0,

a szeregi:

$$\text{a}_5)\quad 1+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5^2}x^{2^2}+\frac{1}{5^3}x^{2^3}+\ldots\ldots$$

$$\text{b}_5)\quad 1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{3^2}x^{2^2}+\frac{1}{4^2}x^{2^3}+\ldots\ldots$$

są zachowania się Z_b.

W każdym z podanych tu szeregów można wykładniki $2, 2^2, 2^3, \ldots$ zamienić na $m_1, m_2, m_3, \ldots.$ gdzie m_s jest dzielnikiem wszystkich liczb następujących, a pantachiczne zachowanie się szeregu na całym okręgu [1] przez to się nie zmieni. Lecz równocześnie z tą zmianą trzeba i mnogość (M) zmienić na inną utworzoną podług wykładników m_s.

Co się tyczy szeregów takich, jak (a_2), (b_2), (c_2) o zachowaniu się Z_r, to te — jak już wspomniano — posiadają na całym okręgu [1] wszędzie gęstą mnogość punktów szczególnych. Nie dadzą się więc wyprowadzić poza koło [1] i określają z tego powodu funkcyą analityczną, istniejącą wyłącznie w kole [1].

Lecz podobne funkcye mogą — jak to zaraz pokażemy — określać także i szeregi potęgowe o zachowaniu się Z_b. W tym celu zauważmy szereg

$$\mathfrak{P}_1(x)=1+bx^a+b^2x^{a^2}+b^3x^{a^3}+\ldots\ldots$$

w którym zakładamy $|b|<1$, a wykładniki $m_1, m_2, \ldots\ldots$ zastępują tu liczby

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ ;\ a \text{ dodatne całkowite} > 1.$$

Utwórzmy iloraz

$$q_\nu=\frac{|b|^\nu.\,|x|^{a^\nu}}{|b|^{\nu-1}.\,|x|^{a^{\nu-1}}}=|b|\,.\,|x|^{a^{\nu-1}(a-1)}$$

to ponieważ

$$\lim_{(\nu=\infty)} a^{\nu-1}(a-1)=\infty,\ \text{a więc}\ \lim_{(\nu=\infty)}\frac{1}{a^{\nu-1}(a-1)}=0,$$

więc stąd wynika, że żądając, aby było

$$\lim_{(\nu=\infty)} q_\nu = |\, b \,| \, . \, |\, x \,|^{a^{\nu-1}(a-1)} < 1,$$

dostajemy

$$|\, x \,| < \left(\frac{1}{b}\right)^0 = 1.$$

To wskazuje, że dany szereg ma koło zbieżności [*1*]. Ponieważ dalej — wskutek założenia $|\, b \,| < 1$ — jest $(b+b^2+b^3+ \ldots)$ szeregiem bezwarunkowo zbieżnym, więc i $\mathfrak{P}_1(x)$ jest takimże szeregiem we wszystkich punktach mnogości (M), jest więc zachowanie się Z_b.

Aby rozstrzygnąć, czy się taki szereg da przeprowadzić poza koło [*1*], utwórzmy pochodną

$$\frac{d\mathfrak{P}_1(x)}{dx} = abx^{a-1} + a^2\, b^2 .\, x^{a^2-1} + a^3 \,.\, b^3 \,.\, x^{a^3-1} + \ldots \tag{5}$$

i przejdźmy z niej do iloczynu

$$x \,.\, \frac{d\mathfrak{P}_1(x)}{dx} = \mathfrak{P}_2(x) = abx^a + a^2\, b^2\, x^{a^2} + a^3\, b^3 .\, x^{a^3} + \ldots \tag{6}$$

Szereg $\mathfrak{P}_2(x)$ ma koło zbieżności [*1*] i jest widocznie na tem kole pewnego jednakowego zachowania się w tej samej mnogości (M), co dany szereg $\mathfrak{P}_1(x)$. W tej samej mnogości (M) będzie i pochodny szereg (5) tak samo się zachowywał.

Połóżmy $b = \frac{c}{a}$, i przyjmijmy, że tu jest $|\, c \,| > 1$. Wtedy szereg (6) ma postać

$$c \,.\, x^a + c^2\, x^{a^2} + c^3\, x^{a^3} + \ldots,$$

jest widocznie r o z b i e ż n y w całej mnogości (M), a z nim i szereg pochodny (5) będzie zachowania się Z_r.

Szereg pochodny (5) ma więc na całym okręgu [*1*] pantachiczną mnogość punktów szczególnych; a że podług twierdzenia F ma tę samą własność i szereg pierwotny, więc stąd wynika, że $\mathfrak{P}_1(x)$ określa funkcyą analityczną, która istnieje tylko w kole [*1*].

Szereg posiadający taką własność, podany po raz pierwszy przez W e i e r s t r a s s a (*Abhandlungen aus der Functionenlehre* str. 91, 92) należy do kategoryi szeregów o zachowaniu się Z_b i jest rodzajem szeregu $\mathfrak{P}_1(x)$, jakimeśmy się właśnie wyżej zajmowali. Ilości a, b są u W e i e r s t r a s s a poddane warunkowi: $ab > 1 + \frac{2}{3}\pi$; a jest dodatną i nieparzystą liczbą, b rzeczywistym ułamkiem właściwym.

Gdy $x = e^{ti}$ jest dowolnym punktem okręgu [*1*], a położymy

$$\mathfrak{P}_1(e^{ti}) = P + Qi, \text{ to}$$

$$P = \sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a^\nu t$$

nie posiada dla żadnej wartości t oznaczonej pochodnej i właśnie w tem upatruje W e i e r s t r a s s przyczynę, dla której każdy dowolny punkt okręgu [*1*] jest szczególnym.

Z naszej dedukcyi wynika, że warunki, w którychby szereg $\mathfrak{P}_1(x)$ mógł określić funkcyą istniejącą jedynie w kole [*1*], nie potrzebują być tak ścieśnione, aby $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ zawsze być miało. Dostatecznem jest, aby szereg — ogólniejszej zresztą postaci, niż rozważany szereg $\mathfrak{P}_1(x)$ — o zachowaniu się Z_b posiadał pochodną pantechicznego zachowania się Z_r [1]).

Zapytujemy teraz, jak się szereg (ogólnej postaci)

(7) $$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \ldots..$$

o jednakowem zachowaniu się w mnogości (M), którą utworzono podług wykładników m_s, zachowuje w dowolnym punkcie

(8) $$x = e^{ti}$$

nie należącym do (M)?

Przedewszystkiem z uwag danych w ustępie I-ym wynika, że — jeżeli szereg (7) jest w mnogości (M) zachowania się Z_b — to jest bezwarunkowo zbieżnym także i we wszystkich innych punktach okręgu [*1*], a więc na całym tym okręgu bez wyjątku.

Niech szereg (7) będzie w mnogości (M) zachowania się Z_r, a współczynniki jego c_s niech będą w s z y s t k i e rzeczywiste, tedy w punkcie (8) dostaniemy:

---

1) F r e d h o l m podaje szereg $\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu . x^{\nu^2}$, $|a| < 1$, który określa funkcyją jedynie w kole [*1*]. Nie należy on do szeregów rozważanych tutaj, a jest sam wraz ze wszystkiemi swemi pochodnemi zbieżny na całym okręgu [*1*]. Por. Acta mathematica T. 15. str. 279. „Sur une transcendente rémarqunable trouvé par M. F r e d h o l m" (Wyciąg z listu M i t t a y-L e f f l e r'a de P o i n c a r é g o).

$$\mathfrak{P}(e^{ti}) = (c_0 + c_1 \cos m_1 t + \ldots.) + i\,(c_1 \sin m_1 t + c_2 \sin m_2 t + \ldots) \tag{9}$$

Lecz ilości

$$\cos m_1 t\,,\quad \cos m_2 t\,,\quad \cos m_3 t\,, \;.\;.\;.\;.\;.$$

i ilości

$$\sin m_1 t\,,\quad \sin m_2 t\,,\quad \sin m_3 t\,, \;.\;.\;.\;.\;.$$

są wszystkie skończone i mają bezwzględne wartości < 1. Z tego powodu samo rozwinięcie (9) może być (podług twierdzenia Abla) już-to rozbieżne, już-to nieprzydatne, już-to wreszcie warunkowo zbieżne. Przytem w różnych punktach (8) może się rozwinięcie (9) a więc i szereg (7) w różny sposób zachowywać. Zachowanie się zatem szeregu w tych punktach okręgu [*1*], które na nim pozostają po wyłączeniu punktów mnogości (M) może, ale nie potrzebuje być jednakowe. W każdym jednak razie w żadnym z tych punktów nie znajdujemy ani bezwarunkowej, ani wahającej się zbieżności.

Weźmy n. p. na uwagę szereg

$$1 + \frac{1}{1}\,x^{a} + \frac{1}{2}\,x^{a^2} + \frac{1}{3}\,x^{a^3} + \;.\;.\;.\;.\;.$$

z nieparzystem $a = 4n + 3$ i z $c > 1$. Jest on zachowania się Z_r w mnogości (M), do której punkt

$$x = e^{\frac{k\pi i}{2a^s}} \tag{10}$$

z nieparzystem k z pewnością nie należy.

W takim punkcie mieć będziemy:

$$\sum_{\lambda=s}^{\infty} c_\lambda \,.\, x^{a^\lambda} = \sum_{\lambda=s}^{\infty} c_\lambda\, e^{\frac{k\pi i}{2}\,a^{\lambda-p}} \tag{11}$$

Lecz $e^{\frac{k\pi i}{2}} = \pm i$, a dalej okazuje się, że

$$e^{\frac{k\pi i}{2}\,a} = (\pm i)^{4n+3} = (\pm i)^3 = \mp i$$

$$e^{\frac{k\pi i}{2}\,a^2} = \left(e^{\frac{k\pi i}{2}\,a}\right)^{a} = (\mp i)^3 = \pm i$$

$$e^{\frac{k\pi i}{2}\,a^3} = \left(e^{\frac{k\pi i}{2}\,a^2}\right)^{a} = (\pm i)^3 = \mp i$$

i t. d.

Wskutek tego dostaniemy z (11):

$$\sum_{\lambda=s}^{\infty} c_\lambda \, x^{a^\lambda} = \pm\, i \, . \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \ldots\ldots \right]$$

a to jest widocznie warunkowo zbieżne rozwinięcie. Z tego wynika, że i szereg dany w takich punktach, jak (10), będzie warunkowo zbieżny.

Zachodzi tu pewna analogia z rezultatami badań Wiener'a [1]) i Lercha [2]) odnoszących się do funkcyi

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \, . \cos a_\nu \, \pi x$$

nie posiadającej, w żadnym punkcie rzeczywistego argumentu x, oznaczonej pochodnej, jeżeli ilości a_ν, c_ν — już w szczególny sposób obrane— zadość czynią pewnym ograniczeniom.

Z tych badań okazało się, że o ile łatwem jest między funkcyami $f(x)$ znaleść nieskończenie wiele takich, które w punktach pewnej, dobrze zdefiniowanej mnogości ($\mathfrak{M}$) nie posiadają oznaczonej pochodnej, — o tyle trudniejszem jest zadanie: określić w nich te tylko, które i w dowolnym punkcie x, zachowują się tak, jak w punktach mnogości ($\mathfrak{M}$).

I tu podobnie—stwierdziwszy rozbieżność szeregu $(c_0 + c_1 x^{m_1} + \ldots)$ w punktach mnogości (M) — można dalej zapytać, czy można w nim współczynniki c_0, c_1, c_2, ... i wykładniki m_1, m_2, m_3, ... tak dobrać, aby się szereg okazał rozbieżnym w każdym dowolnym punkcie swego okręgu zbieżności [1].

Czy w ogólności możliwem będzie rozwiązać to zadanie, zachowując postać $(c_0 + c_1 x^{m_1} + \ldots\ldots)$ — tego tu nie rozstrzygamy; zauważymy tylko, że analiści, jako przykład rozbieżnego szeregu na całym okręgu [1] podają bardzo prosty szereg, a mianowicie: rozwinięcie potęgi $(1-x)^\mu$ przy $\mu \leq -1$ [3]). Lecz czynią to niesłusznie, gdyż na okręgu zbieżności tego szeregu znajdują się punkty, w których ten szereg ma zachowanie się Z_n, gdy $\mu < -1$, a ma zachowa-

[1]) Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrass'schen Function. Crelle T. 90 str. 221.

[2]) Ueber die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Fuctionen. Crelle T. 103 str. 126.

[3]) Por. n. p. Biermann l. c. str. 373.

nie się Z_0, gdy $\mu = -1$. Chcąc więc mieć statecznie zachowanie się Z_r na całym okręgu zbieżności [*1*], mamy zadanie o wiele trudniejsze; zadanie, które niezawodnie dłuższych badań wymagać będzie, podobnych do tych, jakich się podjął Pringsheim[1]), tworząc szereg warunkowo zbieżny (o zachowaniu się Z_w) we wszystkich punktach całego okręgu [*1*] bez wyjątku.

Te same uwagi odnieść oczywiście trzeba i do szeregów o zachowaniach się Z_0, Z_n lub wreszcie Z_w w utworzonej mnogości (M).

[1]) Ueber das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. Mathem. Annalen T. 25. 419.