4.

SUR LE PRODUIT INDÉFINI $1-x.1-x^2.1-x^3\ldots$

[*Comptes Rendus*, XCVI. (1883), p. 674.]

DANS le *Johns Hopkins Circular*, numéro de février*, on trouvera l'explication d'une méthode *graphique* pour convertir les produits continus en séries. J'ai appliqué cette méthode pour obtenir la formule connue (Cayley, *Elliptic Functions*, p. 296)

$$\frac{1}{1-ax.1-ax^2.1-ax^3\ldots}$$
$$=1+\frac{xa}{1-x.1-ax}+\frac{x^4a^2}{1-x.1-x^2.1-ax.1-ax^2}$$
$$+\frac{x^9a^3}{1-x.1-x^2.1-x^3.1-ax.1-ax^2.1-ax^3}+\ldots.$$

Je me suis demandé quelle serait l'expression obtenue en appliquant la même construction (ou dissection) graphique (qui fournit la formule citée en haut), au produit $1+ax.1+ax^2.1+ax^3\ldots$, et j'ai trouvé sans aucune difficulté l'expression suivante:

$$1+xa\frac{1+ax^2}{1-x}+x^5a^2\frac{1+ax.1+ax^4}{1-x.1-x^2}+\ldots$$
$$+x^{\frac{3j^2-j}{2}}a^j\frac{1+ax.1+ax^2\ldots1+ax^{j-1}}{1-x.1-x^2\ldots1-x^{j-1}}.\frac{1+ax^{2j}}{1-x^j}+\ldots.$$

En faisant $a=-1$, on obtient

$$1-x.1-x^2.1-x^3\ldots$$
$$=1-x(1+x)+x^5(1+x^2)+\ldots+(-)^jx^{\frac{3j^2-j}{2}}(1+x^j)+\ldots.$$

C'est le théorème bien connu d'Euler, lequel, sous ce point de vue, n'est qu'un corollaire d'un théorème plus général.

Par la même méthode, j'obtiens la série pour les *thêta* fonctions et d'autres séries beaucoup plus générales, sans calcul algébrique aucun.

[* Vol. III. of this Reprint, pp. 669, 686; and above pp. 30, 33.]