2.

SUR LES NOMBRES DE FRACTIONS ORDINAIRES INÉGALES QU'ON PEUT EXPRIMER EN SE SERVANT DE CHIFFRES QUI N'EXCÈDENT PAS UN NOMBRE DONNÉ.

[*Comptes Rendus*, XCVI. (1883), pp. 409—413.]

DANS le *Philosophical Magazine*, 1881, p. 175, M. Airy, associé étranger de l'Institut, annonce qu'il a calculé, pour l'usage de l'Institution of civil Engineers, à Londres, les valeurs logarithmiques de toutes les fractions ordinaires $\frac{m}{n}$, dans lesquelles m et n ne contiennent nul facteur commun et n'excèdent pas 100, arrangées dans l'ordre de leurs grandeurs, et que le nombre de ces fractions est 3043.

Je vais montrer qu'on peut appliquer la méthode dont M. Tchebycheff s'est servi dans sa théorie célèbre sur les nombres premiers, avec l'addition que j'y ai faite*, pour trouver des limites supérieures et inférieures au nombre d'un système pareil de fonctions quand la limite des valeurs de m et de n est un nombre quelconque donné.

1. Je dis que si Ti signifie le nombre de nombres inférieurs et premiers à i, nombre entier (ce que nous nommons, à Baltimore, le *totient* de i), on aura l'identité

$$\sum_{r=\infty}^{r=1}\left(E\frac{i}{r}\,Tr\right)=\frac{i^2+i}{2}.$$

C'est une conséquence du théorème plus général que "si $a_1, a_2, \ldots, a_i$ sont des nombres entiers quelconques, et si l'on nomme le nombre des a qui contiennent r la fréquence de r par rapport au système des a, et qu'on prenne le produit de la fréquence de r par son totient, la somme de ces produits (quand r prend toutes les valeurs de 1 jusqu'à l'infini) sera la somme des a."

* Voir *American Journal of Mathematics*. [Vol. III. of this Reprint, pp. 530, 605, 672.]

2. Nommons Jx la somme-totient de x, c'est-à-dire la somme des totients de tous les nombres qui n'excèdent pas la valeur de Ex (la partie entière de x).

Je me servirai désormais de $\left(\frac{p}{q}\right)$ pour signifier la partie entière de $\frac{p}{q}$.

Or écrivons les suites successives

$$x, \quad x-1, \ \ldots, \quad \left(\frac{x}{2}\right)+1; \quad \left(\frac{x}{2}\right), \quad \left(\frac{x}{2}\right)-1, \ \ldots, \quad \left(\frac{x}{3}\right)+1;$$
$$\left(\frac{x}{3}\right), \quad \left(\frac{x}{3}\right)-1, \ \ldots, \quad \left(\frac{x}{4}\right)+1; \quad \left(\frac{x}{4}\right), \quad \left(\frac{x}{4}\right)-1, \ \ldots, \quad \left(\frac{x}{5}\right)+1;$$
$$\ldots, \quad \ldots\ldots, \ \ldots, \quad \ldots\ldots; \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \ \ldots, \quad \ldots\ldots;$$
$$\left(\frac{x}{2q-1}\right), \quad \left(\frac{x}{2q-1}\right)-1, \ \ldots, \quad \left(\frac{x}{2q}\right)+1; \quad \left(\frac{x}{2q}\right), \quad \left(\frac{x}{2q}\right)-1, \ \ldots, \quad \left(\frac{x}{2q+1}\right)+1;$$
$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \ \ldots, \quad \ldots\ldots; \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \ \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots;$$

q augmentant *ad libitum*.

Je dis que, " si r est un nombre entier quelconque qui se trouve dans les suites d'ordre impair, c'est-à-dire commençant avec x, $\left(\frac{x}{3}\right)$, $\left(\frac{x}{5}\right)$, ..., et si $j = 2i$ ou $2i+1$, on aura

$$E\left(\frac{j}{r}\right) - 2E\left(\frac{i}{r}\right) = 1,$$

et que, si r appartient à une suite quelconque d'ordre pair, on aura

$$E\left(\frac{j}{r}\right) - 2E\left(\frac{i}{r}\right) = 0."$$

Conséquemment, en appliquant le théorème précédent, on aura

$$\frac{j(j+1)}{2} - 2\frac{i(i+1)}{2} = S_1 + S_3 + \ldots + S_{2q-1} + \ldots,$$

où S_{2q-1} est la somme des totients des nombres qui sont en même temps égaux ou inférieurs à $E\frac{j}{2q-1}$ et plus grands que $E\frac{j}{2q}$, c'est-à-dire

$$S_{2q-1} = J\left(\frac{j}{2q-1}\right) - J\left(\frac{j}{2q}\right).$$

Si donc on écrit

$$\theta x = Jx - J\frac{x}{2} + J\frac{x}{3} - J\frac{x}{4} + J\frac{x}{5} - J\frac{x}{6} + \ldots,$$

on aura, quand $x =$ un nombre entier pair (soit $2i$),

$$\theta x = (2i^2 + i) - (i^2 + i) = i^2 = \frac{x^2}{4},$$

et, quand $x =$ un nombre entier impair (soit $2i+1$),

$$\theta x = (i+1)(2i+1) - (i^2+i) = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

Avec l'aide de ces égalités, si x est un nombre positif quelconque entier ou fractionnel, on obtient facilement les inégalités

$$\theta x = \text{ou} > \frac{x^2 - 2x}{4}$$

$$\theta x = \text{ou} < \frac{x^2 + 2x + 1}{4}.$$

En appliquant à ces deux inégalités la méthode d'approximation successive que j'ai appliquée, dans* le Mémoire cité, aux inégalités auxquelles est assujettie la fonction $\psi(x)$ (*voir* Serret, *Algèbre supérieure*, édition de 1879, t. II. p. 233), je parviens facilement et rigoureusement à démontrer que, étant donnée une quantité ϵ aussi petite qu'on veut, on peut trouver une limite supérieure L et une limite inférieure Λ à Jx, où

$$L = \left(\frac{3}{\pi^2} + \eta\right) x^2 - Ax + R(\log x)$$

$$\Lambda = \left(\frac{3}{\pi^2} - \eta'\right) x^2 - A'x + R'(\log x),$$

où $R(\log x)$, $R'(\log x)$ sont tous les deux fonctions rationnelles et entières de $\log x$ d'un degré fini, dont les coefficients aussi bien que A et A' restent toujours finis et où η, η' sont tous les deux plus petits que ϵ.

Il s'ensuit que la fraction $\frac{J(x)}{x^2}$ possède une valeur asymptotique $\frac{3}{\pi^2}$ (ce qui n'est pas démontré pour la fraction analogue $\frac{\psi x}{x}$, dans la théorie parallèle de M. Tchebycheff) et que la valeur de $\frac{Jx}{x^2}$ approche indéfiniment près quand x est pris suffisamment grand de $\frac{3}{\pi^2}$, c'est-à-dire de $\cdot 30396\ldots$.

Il est facile de voir que la quantité Jx diminuée de l'unité n'est autre chose que le nombre des fractions dans les Tables pareilles à celles de M. Airy. Ainsi, pour le cas de $x = 100$ selon M. Airy, $Jx = 3044$. Pour ce cas $\frac{3}{\pi^2} x^2 = 3039 \cdot 6$.

Avec l'aide de ces limites on peut calculer la probabilité que deux nombres dont la limite supérieure est très grande soient premiers entre eux. Car si cette limite est x, le nombre total des cas qui peuvent arriver est x^2, et le nombre des cas pour lesquels les nombres choisis sont premiers entre eux sera $2Jx - 1$. Conséquemment, la probabilité en question sera $\frac{6}{\pi^2}$.

M. Franklin, l'auteur de la belle démonstration, insérée dans les *Comptes rendus*, du théorème d'Euler sur le produit $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, a bien

[* Vol. III. of this Reprint, p. 532.]

voulu m'adresser la remarque que cette conclusion peut être au moins confirmée, peut-être même absolument démontrée, de la manière suivante :

x étant pris très grand, la probabilité que deux nombres inférieurs à x, pris au hasard, ne contiennent pas tous les deux le nombre premier p, sera $1-\frac{1}{p^2}$. Donc, la probabilité cherchée sera

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\ldots,$$

qui est la réciproque de

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots,$$

c'est-à-dire est égal à $\frac{6}{\pi^2}$.

Il y a une suite doublement infinie d'équations fonctionnelles exactes qu'on peut former avec les $J(x)$. En particulier, il y a une série simplement infinie de telles fonctions où les signes sont alternativement positifs et négatifs, et conséquemment peuvent servir chacun à donner une suite infinie de limites à Jx.

Ainsi, si l'on écrit

$$\begin{array}{ll} \theta x = Jx - J\frac{x}{2} & \theta_2 x = 2J\frac{x}{2} - 3J\frac{x}{3} + 2J\frac{x}{4} - J\frac{x}{6} \\ \quad + J\frac{x}{3} - J\frac{x}{4} & \quad + 2J\frac{x}{8} - 3J\frac{x}{9} + 2J\frac{x}{10} - J\frac{x}{12} \\ \quad + J\frac{x}{5} - J\frac{x}{6} & \quad + 2J\frac{x}{14} - 3J\frac{x}{15} + 2J\frac{x}{16} - J\frac{x}{18} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 x = {} & 3J\frac{x}{3} - 4J\frac{x}{4} + 3J\frac{x}{6} - 4J\frac{x}{8} + 3J\frac{x}{9} - J\frac{x}{12} \\ & + 3J\frac{x}{15} - 4J\frac{x}{16} + 3J\frac{x}{18} - 4J\frac{x}{20} + 3J\frac{x}{21} - J\frac{x}{24} \\ & + 3J\frac{x}{27} - 4J\frac{x}{28} + 3J\frac{x}{30} - 4J\frac{x}{32} + 3J\frac{x}{33} - J\frac{x}{34} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on aura toujours, quand

$$x=(k^2+k)\,i, \quad \theta_k x = \frac{x}{2\,(k^2+k)},$$

et quand $$x=(k^2+k)\,i-1, \quad \theta_k x = \frac{(x+1)^2}{2\,(k^2+k)},$$

et, quel que soit le résidu de x par rapport au module k^2+k, on peut calculer la valeur de $\theta_k x$. Enfin, si x est une quantité positive quelconque, on trouvera

$$\theta_k x = \text{ou} > \frac{x^2-x}{2\,(k^2+k)}, \quad \theta_k x = \text{ou} < \frac{x^2+2x+1}{2\,(k^2+k)}.$$