97.

NOTE SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION $x^{257}-1=0$.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLI. (1851), pp. 81—83.]

SOIT p_m la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une racine quelconque (l'unité exceptée) de l'équation $x^{257}-1=0$, et représentons par α une racine quelconque (l'unité exceptée) de l'équation $\alpha^{256}-1=0$. En posant l'équation

$$(p_0+\alpha p_1+\alpha^2 p_2 \ldots + \alpha^{255} p_{255})^2 = M\,(p_0+\alpha^2 p_1+\alpha^4 p_2 \ldots + \alpha^{254} p_{255}),$$

on sait que la quantité M peut être exprimée en fonction rationnelle de α. Cette fonction une fois connue, donnera tout de suite la valeur de l'expression $(p_0+\alpha p_1+\alpha^2 p_2 \ldots + \alpha^{255} p_{255})^{256}$ en fonction rationnelle de α, et cela suffit pour résoudre l'équation dont il s'agit.

Une solution du problème a été donnée depuis longtemps par M. Richelot qui commence par supposer que α soit une racine primitive de l'équation $\alpha^{128}-1=0$. Cette solution est comprise, comme cas particulier, dans celle que je vais donner. La question est d'ailleurs intéressante, à cause de son rapport avec la théorie des nombres. En effet, quoiqu'en tant que je sache l'on n'a pas encore trouvé la règle pour former *à priori* la valeur de M, il est clair que les recherches de MM. Jacobi et Kummer doivent conduire à cette règle. Le résultat ici bas pourra servir pour la vérifier.

Voici la valeur que j'obtiens pour la fonction M:

$$\begin{aligned}
M = -2 &+2\alpha -2\alpha^{4} +2\alpha^{5} +2\alpha^{7} +2\alpha^{9} -2\alpha^{10} -2\alpha^{14} -2\alpha^{16} +2\alpha^{21} +2\alpha^{23}\\
&+2\alpha^{25} -2\alpha^{26} -2\alpha^{28} +2\alpha^{29} -2\alpha^{30} +2\alpha^{33} -2\alpha^{34} -2\alpha^{36} +2\alpha^{37} -2\alpha^{38} +2\alpha^{45}\\
&+2\alpha^{47} -2\alpha^{48} +2\alpha^{49} -2\alpha^{50} +2\alpha^{51} +2\alpha^{53} -2\alpha^{54} -2\alpha^{60} +2\alpha^{61} -2\alpha^{64} +2\alpha^{65}\\
&-2\alpha^{66} +2\alpha^{67} -2\alpha^{68} +2\alpha^{69} -2\alpha^{72} -2\alpha^{74} +2\alpha^{75} -2\alpha^{76} +2\alpha^{79} -2\alpha^{80} -2\alpha^{82}\\
&-2\alpha^{84} -2\alpha^{86} +2\alpha^{89} -2\alpha^{92} -2\alpha^{94} -2\alpha^{100} +2\alpha^{101} -2\alpha^{104} -2\alpha^{106} -2\alpha^{108} +2\alpha^{109}\\
&+2\alpha^{111} +2\alpha^{113} -2\alpha^{114} +2\alpha^{115} +2\alpha^{117} +2\alpha^{119} -2\alpha^{122} +2\alpha^{123} -2\alpha^{124} +2\alpha^{127} -2\alpha^{128}\\
&+2\alpha^{129} -2\alpha^{130} -2\alpha^{134} +2\alpha^{135} -2\alpha^{138} +2\alpha^{141} +2\alpha^{145} +2\alpha^{147} +2\alpha^{151} +2\alpha^{153} -2\alpha^{154}\\
&-2\alpha^{156} -\alpha^{160} +2\alpha^{161} +2\alpha^{163} -2\alpha^{164} +2\alpha^{165} -2\alpha^{166} +2\alpha^{171} +2\alpha^{177} +2\alpha^{181} -2\alpha^{182}\\
&+2\alpha^{183} -2\alpha^{186} +2\alpha^{187} +2\alpha^{189} -2\alpha^{190} -2\alpha^{192} +2\alpha^{195} -2\alpha^{196} -2\alpha^{198} +2\alpha^{199} -2\alpha^{206}\\
&-2\alpha^{212} +2\alpha^{213} -2\alpha^{214} +2\alpha^{215} -2\alpha^{216} +2\alpha^{217} -2\alpha^{220} +2\alpha^{221} +2\alpha^{223} +2\alpha^{225} -2\alpha^{226}\\
&+2\alpha^{227} -2\alpha^{228} +2\alpha^{229} +2\alpha^{233} -2\alpha^{234} +2\alpha^{235} -2\alpha^{236} +2\alpha^{237} -2\alpha^{238} +2\alpha^{239} -2\alpha^{240}\\
&+2\alpha^{243} -2\alpha^{244} -2\alpha^{246} +2\alpha^{247} -2\alpha^{248} +2\alpha^{249} -2\alpha^{252} -2\alpha^{254}.
\end{aligned}$$

Représentons par M' ce que devient M, en supposant $\alpha^{128}+1=0$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} M' = {}& 2\alpha^2 - 2\alpha^4 + 2\alpha^5 + 2\alpha^6 + 2\alpha^9 - 2\alpha^{13} - 2\alpha^{14} - 2\alpha^{16} - 2\alpha^{17} - 2\alpha^{19} + 2\alpha^{21} \\ & + 2\alpha^{29} - 2\alpha^{30} + \alpha^{32} - 2\alpha^{34} - 2\alpha^{35} - 2\alpha^{43} + 2\alpha^{45} + 2\alpha^{47} - 2\alpha^{48} - 2\alpha^{50} + 2\alpha^{51} \\ & - 2\alpha^{55} + 2\alpha^{58} - 2\alpha^{59} - 2\alpha^{60} + 2\alpha^{62} + 2\alpha^{65} - 2\alpha^{66} + 2\alpha^{69} + 2\alpha^{70} - 2\alpha^{71} - 2\alpha^{72} \\ & - 2\alpha^{74} + 2\alpha^{75} - 2\alpha^{76} + 2\alpha^{78} + 2\alpha^{79} - 2\alpha^{80} - 2\alpha^{82} - 2\alpha^{85} - 2\alpha^{87} + 2\alpha^{88} - 2\alpha^{93} \\ & - 2\alpha^{94} - 2\alpha^{95} - 2\alpha^{97} + 2\alpha^{98} - 2\alpha^{99} - 2\alpha^{104} - 2\alpha^{105} - 2\alpha^{107} + 2\alpha^{110} + 2\alpha^{112} + 2\alpha^{113} \\ & - 2\alpha^{114} + 2\alpha^{116} + 2\alpha^{117} + 2\alpha^{118} + 2\alpha^{120} - 2\alpha^{121} - 2\alpha^{122} + 2\alpha^{123} + 2\alpha^{126} + 2\alpha^{127}. \end{aligned}$$

Soient M_1, M_1' ce que devient M en supposant successivement $\alpha^{128}-1=0$, $\alpha^{64}+1=0$, et soient M_2, M_2' ce que deviennent M ou M_1 en supposant successivement $\alpha^{64}-1=0$, $\alpha^{32}+1=0$, et ainsi de suite, jusqu'à M_7, M_7' qui seront ce que deviennent M ou M_1, &c. en supposant successivement $\alpha^2-1=0$, $\alpha+1=0$; nous aurons:

$$\begin{aligned} M_1 = {}& -4 + 4\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha^4 + 2\alpha^5 - 2\alpha^6 + 4\alpha^7 + 2\alpha^9 - 4\alpha^{10} + 2\alpha^{13} - 2\alpha^{14} \\ & - 2\alpha^{16} + 2\alpha^{17} + 2\alpha^{19} + 2\alpha^{21} + 4\alpha^{23} + 4\alpha^{25} - 4\alpha^{26} - 4\alpha^{28} + 2\alpha^{29} - 2\alpha^{30} - \alpha^{32} \\ & + 4\alpha^{33} - 2\alpha^{34} + 2\alpha^{35} - 4\alpha^{36} + 4\alpha^{37} - 4\alpha^{38} + 2\alpha^{43} + 2\alpha^{45} + 2\alpha^{47} - 2\alpha^{48} + 4\alpha^{49} \\ & - 2\alpha^{50} + 2\alpha^{51} + 4\alpha^{53} - 4\alpha^{54} + 2\alpha^{55} - 2\alpha^{58} + 2\alpha^{59} - 2\alpha^{60} + 4\alpha^{61} - 2\alpha^{62} - 4\alpha^{64} \\ & + 2\alpha^{65} - 2\alpha^{66} + 4\alpha^{67} - 4\alpha^{68} + 2\alpha^{69} - 2\alpha^{70} + 2\alpha^{71} - 2\alpha^{72} - 2\alpha^{74} + 2\alpha^{75} - 2\alpha^{76} \\ & - 2\alpha^{78} + 2\alpha^{79} - 2\alpha^{80} - 2\alpha^{82} - 4\alpha^{84} + 2\alpha^{85} - 4\alpha^{86} + 2\alpha^{87} - 2\alpha^{88} + 4\alpha^{89} - 4\alpha^{92} \\ & + 2\alpha^{93} - 2\alpha^{94} + 2\alpha^{95} + 2\alpha^{97} - 2\alpha^{98} + 2\alpha^{99} - 4\alpha^{100} + 4\alpha^{101} - 2\alpha^{104} + 2\alpha^{105} - 4\alpha^{106} \\ & + 2\alpha^{107} - 4\alpha^{108} + 4\alpha^{109} - 2\alpha^{110} + 4\alpha^{111} - 2\alpha^{112} + 2\alpha^{113} - 2\alpha^{114} + 4\alpha^{115} - 2\alpha^{116} + 2\alpha^{117} \\ & - 2\alpha^{118} + 4\alpha^{119} - 2\alpha^{120} + 2\alpha^{121} - 2\alpha^{122} + 2\alpha^{123} - 4\alpha^{124} - 2\alpha^{126} + 2\alpha^{127}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1' = {}& 2\alpha - 4\alpha^3 + 2\alpha^4 + 2\alpha^7 + 2\alpha^8 + 2\alpha^9 - 2\alpha^{10} - 2\alpha^{11} + 2\alpha^{12} + 2\alpha^{13} - 2\alpha^{15} + 2\alpha^{17} \\ & + 2\alpha^{18} + 2\alpha^{19} + 4\alpha^{20} + 4\alpha^{22} + 2\alpha^{23} + 2\alpha^{24} - 4\alpha^{26} - 2\alpha^{31} - \alpha^{32} + 2\alpha^{33} - 4\alpha^{38} + 2\alpha^{40} \\ & - 2\alpha^{41} + 4\alpha^{42} + 4\alpha^{44} - 2\alpha^{45} + 2\alpha^{46} - 2\alpha^{47} + 2\alpha^{49} - 2\alpha^{51} + 2\alpha^{52} + 2\alpha^{53} - 2\alpha^{54} - 2\alpha^{55} \\ & + 2\alpha^{56} - 2\alpha^{57} + 2\alpha^{60} + 4\alpha^{61} - 2\alpha^{63}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = {}& -8 + 6\alpha - 4\alpha^2 + 4\alpha^3 - 6\alpha^4 + 4\alpha^5 - 4\alpha^6 + 6\alpha^7 - 2\alpha^8 + 2\alpha^9 - 6\alpha^{10} + 2\alpha^{11} \\ & - 2\alpha^{12} + 2\alpha^{13} - 2\alpha^{14} + 2\alpha^{15} - 4\alpha^{16} + 2\alpha^{17} - 2\alpha^{18} + 2\alpha^{19} - 4\alpha^{20} + 4\alpha^{21} - 4\alpha^{22} + 6\alpha^{23} \\ & - 2\alpha^{24} + 8\alpha^{25} - 4\alpha^{26} - 8\alpha^{28} + 4\alpha^{29} - 4\alpha^{30} + 2\alpha^{31} - \alpha^{32} + 6\alpha^{33} - 4\alpha^{34} + 4\alpha^{35} - 8\alpha^{36} \\ & + 8\alpha^{37} - 4\alpha^{38} - 2\alpha^{40} + 2\alpha^{41} - 4\alpha^{42} + 4\alpha^{43} - 4\alpha^{44} + 6\alpha^{45} - 2\alpha^{46} + 6\alpha^{47} - 4\alpha^{48} + 6\alpha^{49} \\ & - 4\alpha^{50} + 6\alpha^{51} - 2\alpha^{52} + 6\alpha^{53} - 6\alpha^{54} + 6\alpha^{55} - 2\alpha^{56} + 2\alpha^{57} - 4\alpha^{58} + 4\alpha^{59} - 6\alpha^{60} + 4\alpha^{61} \\ & - 4\alpha^{62} + 2\alpha^{63}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2' = {}& -7 + 2\alpha^4 - 4\alpha^5 + 6\alpha^7 - 2\alpha^{10} - 2\alpha^{11} + 2\alpha^{12} - 4\alpha^{13} - 2\alpha^{14} - 4\alpha^{15} - 4\alpha^{17} + 2\alpha^{18} \\ & - 4\alpha^{19} - 2\alpha^{20} - 2\alpha^{21} + 2\alpha^{22} + 6\alpha^{25} - 4\alpha^{27} - 2\alpha^{28}. \end{aligned}$$

$$M_3 = -9 + 12\alpha - 8\alpha^2 + 8\alpha^3 - 14\alpha^4 + 12\alpha^5 - 8\alpha^6 + 6\alpha^7 - 4\alpha^8 + 4\alpha^9 - 10\alpha^{10} + 6\alpha^{11} - 6\alpha^{12} + 8\alpha^{13} - 6\alpha^{14} + 8\alpha^{15} - 8\alpha^{16} + 8\alpha^{17} - 6\alpha^{18} + 8\alpha^{19} - 6\alpha^{20} + 10\alpha^{21} - 10\alpha^{22} + 12\alpha^{23} - 4\alpha^{24} + 10\alpha^{25} - 8\alpha^{26} + 4\alpha^{27} - 14\alpha^{28} + 8\alpha^{29} - 8\alpha^{30} + 4\alpha^{31}.$$

$$M_3' = -1 + 4\alpha - 2\alpha^2 - 8\alpha^4 + 2\alpha^5 + 2\alpha^6 - 6\alpha^7 - 8\alpha^8 - 6\alpha^9 - 2\alpha^{10} + 2\alpha^{11} + 8\alpha^{12} + 2\alpha^{14} + 4\alpha^{15}.$$

$$M_4 = -17 + 20\alpha - 14\alpha^2 + 16\alpha^3 - 20\alpha^4 + 22\alpha^5 - 18\alpha^6 + 18\alpha^7 - 8\alpha^8 + 14\alpha^9 - 18\alpha^{10} + 10\alpha^{11} - 20\alpha^{12} + 16\alpha^{13} - 14\alpha^{14} + 12\alpha^{15}.$$

$$M_4' = -9 + 6\alpha + 4\alpha^2 + 6\alpha^3 + 6\alpha^5 - 4\alpha^6 + 6\alpha^7.$$

$$M_5 = -25 + 34\alpha - 32\alpha^2 + 26\alpha^3 - 40\alpha^4 + 38\alpha^5 - 32\alpha^6 + 30\alpha^7.$$

$$M_5' = -15 - 4\alpha - 4\alpha^3.$$

$$M_6 = -65 + 72\alpha - 64\alpha^2 + 56\alpha^3.$$

$$M_6' = -1 + 16\alpha.$$

$$M_7 = -129 + 128\alpha.$$

$$M_7' = -257.$$

Ces différentes expressions étant trouvées, supposons que α soit une racine primitive, et représentons par $F, F_1, F_2, \ldots F_7$ ce que deviennent $M', M_1', M_2' \ldots M_7'$ en substituant $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \ldots \alpha^{128}$ au lieu de α ($F = M'$, $F_7 = -257$); nous aurons

$$(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 \ldots + \alpha^{255} p_{255})^{256} = -F^{128} . F_1^{64} . F_2^{32} . F_3^{16} . F_4^{8} . F_5^{4} . F_6^{2} . F_7;$$

cette équation constitue la solution dont il s'agit.

Ajoutons encore les formules beaucoup plus simples qui correspondent à l'équation $x^{17} - 1 = 0$. En supposant $\alpha^{16} - 1 = 0$, nous aurons

$$M = -2 - \alpha^4 + 2\alpha^5 + 2\alpha^7 - 2\alpha^8 + 2\alpha^9 - 2\alpha^{10} + 2\alpha^{13} - 2\alpha^{14}.$$

$$M' = -2\alpha + 2\alpha^2 - \alpha^4 + 2\alpha^6 + 2\alpha^7.$$

$$M_1 = -4 + 2\alpha - 2\alpha^2 - \alpha^4 + 4\alpha^5 - 2\alpha^6 + 2\alpha^7.$$

$$M_1' = -3 - 2\alpha - 2\alpha^3.$$

$$M_2 = -5 + 6\alpha - 4\alpha^2 + 2\alpha^3.$$

$$M_2' = -1 + 4\alpha.$$

$$M_3 = -9 + 8\alpha.$$

$$M_3' = -17;$$

et de là, en supposant que α soit une racine primitive:

$$(p_0 + \alpha p_1 + \ldots + \alpha^{15} p_{15})^{16} = (-2\alpha + 2\alpha^2 - \alpha^4 + 2\alpha^6 + 2\alpha^7)^8 . (-3 - 2\alpha^2 - 2\alpha^6)^4 . (-1 + 4\alpha^4)^2 . 17.$$

Pour $x^5 - 1 = 0$ on obtient sans peine

$$(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3)^4 = (-2 - \alpha^2 + 2\alpha^3)^2 . 5;$$

où α est une racine primitive de l'équation $\alpha^4 - 1 = 0$, savoir $\alpha = \pm i$.