93.

NOTE SUR QUELQUES FORMULES QUI SE RAPPORTENT À LA MULTIPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXIX. (1850), pp. 16—22.]

LES fonctions

$$\{\lambda,\ \mu,\ x,\ y\} = P_{0,0} - \left(\frac{1}{1} P_{1,0}\, x + \frac{1}{1} P_{0,1}\, y\right) + \left(\frac{1}{1.2} P_{2,0}\, x^2 + \frac{1}{1.1} P_{1,1}\, xy + \frac{1}{1.2} P_{0,2}\, y^2\right) - \&c.,$$

où $P_{0,0} = 1$ et les autres coefficients sont donnés par l'équation à différences

$$\begin{aligned}
&[-l\lambda - m\mu + (l-m)^2]\, P_{l,m} \\
&+ l(\lambda - 2l + 2m + 2)(\lambda - 2l + 2m + 1)\, P_{l-1,m} \\
&+ m(\mu + 2l - 2m + 2)(\mu + 2l - 2m + 1)\, P_{l,m-1} \\
&- 16lm[\lambda\mu - (2l + 2m - 4)(\lambda + \mu)]\, P_{l-1,m-1} = 0,
\end{aligned}$$

jouent, comme je crois, un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques[1].

[1] La fonction $\{\lambda,\ \mu,\ x,\ y\}$ satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}
&-[\lambda(\lambda-1)\, x + \mu(\mu-1)\, y + 16\lambda\mu\, xy]\, u \\
&+ [-(\lambda-1) + (4\lambda-6)\, x + (4\mu+2)\, y + 32(\lambda+\mu)\, xy]\, y\frac{du}{dx} \\
&+ [-(\mu-1) + (4\lambda+2)\, x + (4\mu-6)\, y + 32(\lambda+\mu)\, xy]\, y\frac{du}{dy} \\
&+ (1-4x-4y)\left(x^2\frac{d^2u}{dx^2} - 2xy\frac{d^2u}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2u}{dy^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

qui peut être tirée de l'équation

$$n(n-1)\, x^2 u + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\frac{du}{dx} + (1 - \alpha x^2 + x^4)\frac{d^2u}{dx^2} - 2n(\alpha^2 - 4)\frac{du}{d\alpha} = 0$$

(voyez le mémoire cité plus bas), mais qu'on obtient plus facilement au moyen de l'équation à différences à laquelle satisfont les coefficients $P_{l,m}$.

En effet, en faisant $x=\sqrt{k}\sin\operatorname{am} u$, $\alpha=k+\dfrac{1}{k}$ et en représentant par z le dénominateur de la fonction $\sqrt{k}\sin\operatorname{am} nu$ (où n est un entier positif quelconque), on aura

$$z=z_1+z_2+\ldots+z_s+\ldots,$$

cette série étant continuée jusqu'au terme $z_{\frac{1}{2}n}$ ou $z_{\frac{1}{2}(n-1)}$, selon que n est pair ou impair, et la fonction z étant donnée par l'équation

$$z_s=(-1)^{(n+1)s}(4\alpha)^{s(n-2s)}x^{2ns}\left\{n^2-2ns,\ 2ns,\frac{x^2}{4\alpha},\ \frac{1}{4\alpha x^2}\right\},$$

où cependant les termes qui contiennent des puissances négatives de α doivent être négligés. Ces formules reviennent à celles que j'ai présentées dans la "Note sur les fonctions elliptiques" (t. XXXVII.), [67].

En revenant aux fonctions $\{\lambda, \mu, x, y\}$, j'ai trouvé les deux formules

$$\begin{aligned}
P_{l,0}&=\lambda\,[\lambda-l-1]^{l-1},\\
P_{l,1}&=\mu\lambda\,[\lambda-l-1]^{l-1}\\
&\quad+l\lambda\,[\lambda-l-1]^{l-3}\{(18l-16)\lambda-(16\lambda^2-10l-4)\}\\
&\quad-\frac{10l\lambda\mu}{\lambda+\mu}\lambda\,[\lambda-l]^{l-2}
\end{aligned}$$

(où selon la notation de Vandermonde la factorielle $p\,(p-1)\ldots(p-q+1)$ est exprimée par $[p]^q$). De là, et en calculant la valeur de $P_{2,2}$ à l'aide de l'équation à différences, on obtient:

$$\begin{aligned}
P_{0,0}&=1,\\
P_{1,0}&=\lambda,\\
P_{0,1}&=\mu,\\
P_{2,0}&=\lambda\,(\lambda-3),\\
P_{1,1}&=\left(\lambda\mu+2-\frac{10\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right),\\
P_{0,2}&=\mu\,(\mu-3),\\
P_{3,0}&=\lambda\,(\lambda-4)\,(\lambda-5),\\
P_{2,1}&=\lambda\left((\lambda-3)\,\mu+40-\frac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right),\\
P_{1,2}&=\mu\left((\mu-3)\,\lambda+40-\frac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right),\\
P_{0,3}&=\mu\,(\mu-4)\,(\mu-5),
\end{aligned}$$

$$P_{4,0}=\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7),$$

$$P_{3,1}=\lambda\left(\mu(\lambda-4)(\lambda-5)+114\lambda-330-\frac{30\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\lambda-3)\right),$$

$$P_{2,2}=\left(\lambda(\lambda-3)\mu(\mu-3)+152\lambda\mu+336-\frac{40\lambda^2\mu^2+1156\lambda\mu}{\lambda+\mu}+\frac{200\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right),$$

$$P_{1,3}=\mu\left(\lambda(\mu-4)(\mu-5)+114\mu-330-\frac{30\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\mu-3)\right),$$

$$P_{0,4}=\mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7);$$

la première partie de cette table se trouve dans la note citée.

Nous remarquerons en passant que pour $y=0$, on a $\{\lambda,\ \mu,\ x,\ 0\}=(\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}-x)})^\lambda$. On sait que la théorie de la multiplication des fonctions circulaires depend de la fonction $(x+\sqrt{(x^2-1)})^\lambda$ ou, en faisant $\frac{1}{4}x^{-2}=\mathrm{x}$, de la fonction $(\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}-\mathrm{x})})^\lambda$. Cela fait espérer que l'on parviendra par les fonctions $\{\lambda,\ \mu,\ x,\ y\}$ à la théorie complète de la multiplication des fonctions elliptiques.

J'ai calculé les valeurs qui servent à trouver les dénominateurs z de sin am nu, où n est un quelconque des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Les voici:

$$n=1,\quad z_0=1,\qquad z=z_0,$$

$$n=2,\quad z_0=1,\quad -z_1=-x^4,\qquad z=z_0-z_1,$$

$$n=3,\quad z_0=1,\quad +z_1=4\alpha x^6-(6x^4+3x^8),\qquad z=z_0+z_1,$$

$$n=4,\quad z_0=1,\quad -z_1=-16\alpha^2x^8+4\alpha(8x^{10}+8x^6)-(20x^{12}+26x^8+20x^4),$$

$$z_2=x^{16},\qquad z=z_0-z_1+z_2,$$

$$n=5,\quad z_0=1,\qquad z=z_0+z_1+z_2,$$

$$\begin{aligned} z_1=&\ 64\alpha^3\ x^{10}\\ &-16\alpha^2(15x^{12}+10x^8)\\ &+4\alpha(90x^{14}+92x^{10}+35x^6)\\ &-(275x^{16}+300x^{12}+125x^8+50x^4),\\ z_2=&\ 16\alpha^2\ x^{20}\\ &-4\alpha(5x^{22}+20x^{18})\\ &+(5x^{24}+62x^{20}+170x^{16}),\end{aligned}$$

$$n=6,\quad +z_0=1,\qquad z=z_0-z_1+z_2-z_3,$$

$$\begin{aligned} -z_1=&-256\alpha^4\ x^{12}\\ &+64\alpha^3(24x^{14}+12x^{10})\\ &-16\alpha^2(252x^{16}+210x^{12}+54x^8)\\ &+4\alpha(1520x^{18}+1584x^{14}+576x^{10}+112x^6)\\ &-(5814x^{20}+7704x^{16}+2400x^{12}+444x^8+105x^4),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
+z_2 = {} & 256\alpha^4 \quad x^{24} \\
& - 64\alpha^3 (12x^{26} + 24x^{22}) \\
& + 16\alpha^2 (54x^{28} + 210x^{24} + 252x^{20}) \\
& - 4\alpha (112x^{30} + 576x^{26} + 1584x^{22} + 1520x^{18}) \\
& + (105x^{32} + 444x^{28} + 2400x^{24} + 7704x^{20} + 5814x^{16}), \\
-z_3 = {} & -x^{36},
\end{aligned}
$$

$$n = 7, \qquad z = z_0 + z_1 + z_2 + z_3.$$

$$
\begin{aligned}
z_0 = {} & 1, \\
z_1 = {} & 1024\alpha^5 \quad x^{14} \\
& - 256\alpha^4 (35x^{16} + 14x^{12}) \\
& + 64\alpha^3 (1120x^{18} + 196x^{14} + 77x^{10}) \\
& - 16\alpha^2 (5425x^{20} + 5040x^{16} + 1575x^{12} + 210x^8) \\
& + 4\alpha (35525x^{22} + 41300x^{18} + 14934x^{14} + 2604x^{10} + 294x^6) \\
& - (166257x^{24} + 260750x^{20} + 220395x^{16} + 14756x^{12} + 1304x^8 + 196x^4), \\
z_2 = {} & 4096\alpha^6 \quad x^{28} \\
& - 1024\alpha^5 (21x^{30} + 28x^{26}) \\
& + 256\alpha^4 (189x^{32} + 470x^{28} + 350x^{24}) \\
& - 64\alpha^3 (952x^{34} + 3192x^{30} + 4550x^{26} + 2576x^{22}) \\
& + 16\alpha^2 (2940x^{36} + 11200x^{32} + 21750x^{28} + 25452x^{24} + 12397x^{20}) \\
& - 4\alpha (5733x^{38} + 22064x^{34} + 44324x^{30} + 82488x^{26} + 96761x^{22} + 40964x^{18}) \\
& + (7007x^{40} + 59388x^{36} + 35231x^{32} + 41132x^{28} + 278173x^{24} + 302918x^{20} + 94962x^{16}), \\
z_3 = {} & 64\alpha^3 \quad x^{42} \\
& - 16\alpha^2 (7x^{44} + 42x^{40}) \\
& + 4\alpha (14x^{46} + 236x^{42} + 819x^{38}) \\
& - (7x^{48} + 308x^{44} + 4053x^{40} + 9842x^{36}).
\end{aligned}
$$

Pour rassembler tous mes résultats, je veux citer ceux que j'ai donné dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* [vol. II. (1847), 45, and vol. III. (1848), 57]. En écrivant la lettre p au lieu de n (symbole qui représente le carré du nombre n de ce mémoire), et en changeant les signes des termes alternatifs, on aura pour solution particulière de l'équation

$$p(p-1)x^2z + (p-1)(ax - 2x^2)\frac{dz}{dx} + (1 - ax^2 + x^4)\frac{d^2z}{dx^2} - 2p(\alpha^2 - 4)\frac{dz}{d\alpha} = 0$$

(savoir pour la solution qui pour $p=n^2$ se réduit au dénominateur de $\sin\operatorname{am} u$) la valeur

$$z = 1 - C_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + C_6 \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \&c.,$$

les coefficients étant déterminés au moyen de l'expression

$$C_{r+2} = -(2r+1)(2r+2)(p-2r)(p-2r-1)\,C_r + (2r+2)(p-2r-2)\,\alpha C_{r+1} - 2p(\alpha^2-4)\frac{dC_{r+1}}{d\alpha}.$$

Cela donne les valeurs particulières suivantes:

$$C_2 = 2p(p-1),$$
$$C_3 = 8p(p-1)(p-4)\,\alpha,$$
&c.

[viz. with the change referred to, these are the values of $C_2, C_3, \ldots C_8$ given *ante* p. 299].

On remarquera que dans ces formules le premier terme de C_8 ne contient pas, comme on pourrait l'attendre, le facteur $(p-25)$. Cela vient de ce que le coefficient C_8 est composé des coefficients des termes correspondants de z_0 et z_1, tandis que les coefficients C_7, &c., sont tout simplement des coefficients de z_0. La suite des coefficients C offre plusieurs discontinuités de cette sorte. Par exemple on obtient généralement

$$C_r = (-)^{r+1} \left\{ \begin{array}{l} 2^{2r-3} p(p-1^2)\ldots(p-(r-1)^2)\,C_r{}^1 \alpha^{r-2} \\ + 2^{2r-6} p(p-1^2)\ldots(p-(r-2)^2)\,C_r{}^2 \alpha^{r-4} \\ + 2^{2r-9} p(p-1^2)\ldots(p-(r-3)^2)\,C_r{}^3 \alpha^{r-6} \\ + \&c.; \end{array} \right.$$

mais le terme suivant ne contient pas le facteur $p(p-1^2)\ldots(p-(r-4)^2)$. Quant à la loi des coefficients $C_r{}^1, C_r{}^2, C_r{}^3$, on a

$$C_r{}^1 = 1,$$
$$C_r{}^2 = (r-3)\{n(2r-7)+(r-1)(8r-7)\},$$
$$C_r{}^3 = (r-4)(r-5)\{n^2(4r^2-24r+51) + n(32r^3-220r^2+412r-255) + 2(r-1)(r-2)(32r^2-88r+51)\}.$$

Également, en ordonnant la série suivant les puissances descendantes de x, la quantité z étant la solution particulière qui pour $p=n^2$ (n impair) se réduit au dénominateur de $\sin\operatorname{am} nu$, on aura

$$z = (-1)^{\frac{1}{2}(\sqrt{p}-1)} \cdot \sqrt{p}\left(x^{p-1} - D_1 \frac{x^{p-3}}{1.2.3} + D_2 \frac{x^{p-5}}{1.2.3.4.5} - \&c.\right),$$

où les coefficients D sont donnés par l'expression

$$D_{r+2} = -(2r+3)(2r+2)(p-2r-2)(p-2r-1)D_r$$
$$+(2r+3)(p-2r-3)\alpha D_{r+1} - 2p(\alpha^2-4)\frac{dD_{r+1}}{d\alpha},$$

ce qui donne les valeurs particulières suivantes:

$$D_1 = \quad (p-1)\alpha,$$
$$D_2 = 2(p-1)(p+6)$$
$$+ (p-1)(p-9)\alpha^2,$$
&c.

[viz. with the change referred to, these are the values of $D_1, D_2, \ldots D_6$ given *ante* pp. 364, 365].

Les mêmes remarques sont applicables aux coefficients D; seulement la discontinuité a lieu ici dès le coefficient D_4. Il paraît que c'est cause de cette discontinuité que le signe négatif se présente aux premiers termes des coefficients D_4, &c. En effet, on a généralement:

$$D_r = (p-1)(p-9)\ldots(p-(2r-1)^2)\alpha^r$$
$$+(p-1)(p-9)\ldots(p-(2r-3)^2)r(r-1)(p+4r-2)\alpha^{r-2}$$
$$+ \&c.;$$

ici la discontinuité se présente déjà dans le terme suivant, qui ne contient pas le facteur $(p-1)(p-9)\ldots(p-(2r-5)^2)$. Et c'est précisément le terme suivant qui devient négatif dans les expressions de D_4, D_5 et D_6. Mais tout cela est moins important que la théorie des séries partielles z_s, sur lesquelles les recherches ultérieures seront à fonder.

PROBLÈME.

Donner la solution de l'équation à différences

$$(-l\lambda - m\mu + (l-m)^2)P_{l,m}$$
$$+ l\,(\lambda - 2l + 2m + 2)(\lambda - 2l + 2m + 1)P_{l-1,m}$$
$$+ m\,(\mu + 2l - 2m + 2)(\mu + 2l - 2m + 1)P_{l,m-1}$$
$$-16lm\,(\lambda\mu - (2l+2m-4)(\lambda+\mu))P_{l-1,m-1} = 0,$$

dans laquelle $P_{0,0} = 1$. (Voyez la "Note sur quelques formules &c.")