90.

NOTE SUR QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX CONIQUES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXIX. (1850), pp. 1—3.]

SOIT, comme à l'ordinaire :

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= BC - F^2,\\
\mathfrak{B} &= CA - G^2,\\
\mathfrak{C} &= AB - H^2,\\
\mathfrak{F} &= GH - AF,\\
\mathfrak{G} &= HF - BG,\\
\mathfrak{H} &= FG - CH,\\
K &= ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH,
\end{aligned}\right\}\text{..................(1)}$$

et désignons, pour abréger, les fonctions

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy,$$

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z + F(\beta z + \gamma y) + G(\gamma x + \alpha z) + H(\alpha y + \beta x),$$

$$A(\beta z - \gamma y)^2 + B(\gamma x - \alpha z)^2 + C(\alpha y - \beta x)^2 + 2F(\gamma x - \alpha z)(\alpha y - \beta x)$$
$$+ 2G(\alpha y - \beta x)(\beta z - \gamma y) + 2H(\beta z - \gamma y)(\gamma x - \alpha z);$$

&c.

par $$Ax^2 + \ldots;\quad A\alpha x + \ldots;\quad A(\beta z - \gamma y)^2 + \ldots;\ \&c.$$

Cela posé, soient $\mathfrak{A} + \mathrm{a}$, $\mathfrak{B} + \mathrm{b}$, $\mathfrak{C} + \mathrm{c}$, $\mathfrak{F} + \mathrm{f}$, $\mathfrak{G} + \mathrm{g}$, $\mathfrak{H} + \mathrm{h}$, $K + \mathrm{k}$ ce que deviennent $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, K, en écrivant $A + \alpha^2$, $B + \beta^2$, $C + \gamma^2$, $F + \beta\gamma$, $G + \gamma\alpha$, $H + \alpha\beta$ au lieu de A, B, C, F, G, H. Alors on aura d'abord

$$\mathrm{k} = \mathfrak{A}\alpha^2 + \ldots \qquad \text{..................(2)}$$

www.rcin.org.pl

et les quantités a, b, c, f, g, h seront données par l'équation

$$\mathrm{a}x^2 + \ldots = A\,(\beta z - \gamma y)^2 + \ldots \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

ou, si l'on veut, par celle-ci :

$$\mathrm{a}xx_1 + \ldots = A\,(\beta z - \gamma y)\,(\beta z_1 - \gamma y_1) + \ldots \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

(savoir, en considérant ces équations comme identiques par rapport à x, y, z et x_1, y_1, z_1 respectivement).

On obtient sans difficulté les équations identiques:

$$(A\alpha\alpha_1 + \ldots)\,(Axx_1 + \ldots) - (A\alpha x + \ldots)\,(A\alpha_1 x_1 + \ldots) = \quad \mathfrak{A}\,(\beta z_1 - \gamma y_1)\,(\beta_1 z - \gamma_1 y) + \ldots\,, \ (5),$$

$$(\mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \ldots)\,(\mathfrak{A}xx_1 + \ldots) - (\mathfrak{A}\alpha x + \ldots)\,(\mathfrak{A}\alpha_1 x_1 + \ldots) = K\,[A\,(\beta z_1 - \gamma y_1)\,(\beta_1 z - \gamma_1 y) + \ldots]\ (6).$$

Comme on sait, la condition sous laquelle la droite $lx + my + nz = 0$ touche la conique $U = Ax^2 + \ldots = 0$ peut être présentée sous la forme $\mathfrak{A}l^2 + \ldots = 0$. Donc la condition pour que cette droite touche la conique $U + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0$, est

$$\mathfrak{A}l^2 + \ldots + A\,(\gamma m - \beta n)^2 + \ldots = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7).$$

En réduisant au moyen de l'équation $(\mathfrak{A}\alpha^2 + \ldots)\,(\mathfrak{A}l^2 + \ldots) = K\,[A\,(\gamma m - \beta n)^2 + \ldots\,]$ (laquelle n'est qu'un cas particulier de l'équation (6)), cette condition devient:

$$(K + \mathfrak{A}\alpha^2 + \ldots)\,(\mathfrak{A}l^2 + \ldots) - (\mathfrak{A}\alpha l + \ldots)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8).$$

Pour trouver la condition sous laquelle les coniques

$$U + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0, \quad U + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)^2 = 0$$

se touchent, on n'a qu'à remarquer que l'équation de la tangente commune est, ou

$$(\alpha - \alpha_1)\,x + (\beta - \beta_1)\,y + (\gamma - \gamma_1)\,z = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\alpha + \alpha_1)\,x + (\beta + \beta_1)\,y + (\gamma + \gamma_1)\,z = 0.$$

En ne considérant que la première de ces droites, on a pour la condition cherchée:

$$\mathfrak{A}\,(\alpha - \alpha_1)^2 + \ldots + A\,(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2 + \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9);$$

ou, en réduisant au moyen du même cas particulier de l'équation (6), on obtient cette condition sous la forme

$$(K + \mathfrak{A}\alpha^2 + \ldots)\,(K + \mathfrak{A}\alpha_1^2 + \ldots) - (K + \mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \ldots)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots(10).$$

On sait que les coordonnées X, Y, Z du pôle de la droite $lx + my + nz = 0$, par rapport à la conique $U = 0$, peuvent être trouvées par l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = \mathfrak{A}l\lambda + \ldots\,,$$

www.rcin.org.pl

(considérée comme identique par rapport à λ, μ, ν). De là les coordonnées X, Y, Z du pôle de cette même droite par rapport à la conique

$$U + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0$$

se trouveront par l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = \mathfrak{A} l\lambda + \ldots + A\,(\gamma m - \beta n)\,(\gamma\mu - \beta\nu)\ldots \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

(considérée comme identique par rapport à λ, μ, ν). Cette équation peut aussi être présentée sous la forme

$$K(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = (K + \mathfrak{A}\alpha^2 + \ldots)\,(\mathfrak{A} l\lambda + \ldots) - (\mathfrak{A}\alpha\lambda + \ldots)\,(\mathfrak{A}\alpha l + \ldots) \quad \ldots (12),$$

ce qui peut être démontré facilement au moyen d'un cas particulier de l'équation (6).

Si les deux droites $lx + my + nz = 0$, $l'x + m'y + n'z = 0$, touchent la conique $U = 0$, l'équation de la droite qui passe par les points de contact sera $A\,(mn' - m'n)\,x + \ldots = 0$. Donc: si ces deux droites touchent la conique $U + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0$, l'équation de la droite qui passe par les deux points de contact sera

$$A\,(mn' - m'n)\,x + \ldots + (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,[\alpha\,(mn' - m'n) + \beta\,(nl' - n'l) + \gamma\,(lm' - l'm)] = 0 \;\ldots (13).$$

Les formules obtenues seront utiles pour la solution du problème du mémoire suivant, [91]. Je les ai rapprochées ici pour ne pas interrompre cette solution.

www.rcin.org.pl