71.

NOTE SUR LES FONCTIONS DU SECOND ORDRE.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXVIII. (1848), pp. 105—106.]

Soient x, y, ... des variables dont le nombre est $2n$ ou $2n+1$; représentons par ξ, η, ... un nombre égal de fonctions linéaires des variables x, y, ... et soit

$$U = \xi x + \eta y + \dots$$
$$= Ax^2 + By^2 + \dots + 2Hxy + \dots$$

et
$$V = \begin{vmatrix} . & \xi, & \eta \, .. \\ \xi, & A, & H \\ \eta, & H, & B \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

J'ai trouvé que les deux fonctions U et V peuvent être réduites à la forme

$$U = \lambda\,\Omega + \mu\,\Theta,$$
$$V = \lambda'\Omega + \mu'\Theta,$$

où λ, μ, λ', μ' sont des coefficients constants, Ω est une fonction du second ordre des n variables (fonctions linéaires de x, y, ...), et Θ est une fonction de n ou de $n+1$ variables (fonctions linèaires de x, y, ...); selon que le nombre des variables x, y, ... est $2n$ ou $2n+1$.

Par exemple pour trois variables x, y, z, on a

$$U = \lambda\,x^2 + \mu\,yz,$$
$$V = \lambda' x^2 + \mu' yz\,;$$

et les coniques représentées par les équations $U=0$, $V=0$ ont entre elles un contact double. Cela se rapporte à la théorie des réciproques dans la géométrie plane, telle que M. Plücker l'a présentée dans son "System der analytischen Geometrie" [4°, Berlin, 1835].

De même pour quatre variables x, y, z, w on a

$$U = \lambda\, xy + \mu\, zw,$$
$$V = \lambda' xy + \mu' zw,$$

et les surfaces représentées par les équations $U = 0$, $V = 0$ se coupent dans quatre droites, ou bien se touchent aux quatre sommets d'un quadrilatère gauche. Cela se rapporte également à la théorie des réciproques dans l'espace: théorie dont j'ai parlé dans mon Mémoire "Sur quelques théorèmes de la géométrie de position," § VI, [70].

Il y a à remarquer que dans le cas où les coefficients de x, y, ... dans les fonctions ξ, η, ... forment un système symétrique, c'est-à-dire, où

$$\begin{aligned} \xi &= Ax + Hy + \dots, \\ \eta &= Hx + By + \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

on a $\lambda : \mu = \lambda' : \mu'$, et de là $V = KU$, K étant donné par l'équation

$$K = \begin{vmatrix} A, & H, \dots \\ H, & B, \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

ce qui est connu.

Remarquons enfin que dans le cas général où

$$\begin{aligned} \xi &= a\,x + b\,y + \dots, \\ \eta &= a'x + b'y + \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

la fonction V ne change pas de valeur en écrivant au lieu de ces expressions:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + a'y + \dots, \\ \eta &= bx + b'y + \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

propriété qui se rapporte aussi à la théorie des réciproques.