70.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DE POSITION.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXVIII. (1848), pp. 97—104: continued from t. XXXIV. p. 275, **55**.]

§ V.

Le théorème de Pascal appliqué au cas où une conique se réduit à deux droites, donne lieu à un système de neuf points situés trois à trois dans neuf droites qui passent réciproquement trois à trois par les neuf points. Je représenterai ces points par

$$1, 4, 7;\quad 2, 5, 8;\quad 3, 6, 9,$$

et les droites par

$$135,\ 426,\ 789;\quad 129,\ 483,\ 756;\quad 186,\ 459,\ 723.$$

On peut prendre pour la conique dont il s'agit, deux quelconques de ces droites qui ne se rencontrent pas dans un des neuf points, ou ce qui revient au même, deux quelconques des droites qui appartiennent à un des trois systèmes dans lesquels les droites viennent d'être divisées; alors la troisième droite sera celle qui contient les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone. Par exemple, en prenant pour conique les deux droites 135, 246, l'hexagone sera 123456, et les points de rencontre des côtés opposés, savoir de 12 et 45, de 23 et 56, et de 34 et 61, seront respectivement 9, 7, 8; c'est-à-dire des points situés dans la droite 789; de manière que:

Théorème XV. "La figure formée par neuf points situés 3 à 3 dans 9 droites peut être considérée, de neuf manières différentes, comme résultante du théorème de Pascal appliqué au cas où la conique se réduit à deux droites."

Il y a, comme l'a remarqué M. Graves dans le mémoire cité du *Philosophical Magazine,* une autre manière assez singulière d'envisager la figure. Considérons pour cela les trois triangles 126, 489, 735, qui peuvent être dérivés assez simplement de l'arrangement 135, 426, 789. Le premier de ces triangles est circonscrit au second; car les côtés 26, 61, 12 contiennent respectivement les points 4, 8, 9; également le second est circonscrit au troisième; et le troisième au premier. On tire encore du même arrangement 135, 426, 789 un autre système pareil de triangles; savoir 189, 435, 726. Pareillement les arrangements 129, 483, 756 et 186, 459, 723 donnent lieu chacun à deux systèmes analogues. Donc:

THÉORÈME XVI. La figure formée par neuf points situés 3 à 3 dans 9 droites peut être considérée, de six manières différentes, comme composée de trois triangles circonscrits cycliquement l'un à l'autre.

Représentons maintenant par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre (six de ces points seront nécessairement imaginaires). Ces points sont, comme on sait, situés 3 à 3 dans douze droites qui passent réciproquement quatre à quatre par les neuf points, et qui peuvent être représentées par

135, 426, 789; 129, 483, 756; 186, 459, 723; 147, 258, 369;

de sorte que ce système est un cas particulier de celui que nous venons de considérer. En considérant deux quelconques des droites qui ont un point en commun, par exemple 147, 186, et les deux autres droites qui passent par ce même point 135, 129, on obtient par là deux quadrilatères 4876 et 3952 qui ont pour centre commun le point 7 et dont chacun est circonscrit à l'autre. On aurait pu obtenir par ces mêmes droites 147, 186, 135, 129 des autres systèmes pareils; donc

THÉORÈME XVII. Huit points quelconques, parmi neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, peuvent être considérés de trois manières différentes comme formant deux quadrilatères circonscrits l'un à l'autre. Les diagonales de ces six quadrilatères se réduisent à quatre droites qui passent par le neuvième point d'inflexion.

§ VI. *Sur les figures réciproques.*

Soient $\xi : \omega$, $\eta : \omega$, $\rho : \omega$ les coordonnées d'un point. Les deux plans définis par les équations

$$\left.\begin{array}{l}(a\ \xi+b\ \ \eta+c\ \ \rho+d\ \ \omega)\ x\\ +(a'\ \xi+b'\ \eta+c'\ \rho+d'\ \omega)\ y\\ +(a''\ \xi+b''\ \eta+c''\ \rho+d''\ \omega)\ z\\ +(a'''\xi+b'''\eta+c'''\rho+d'''\omega)\ w\end{array}\right\}=0,\ \text{et}\ \left.\begin{array}{l}(a\xi+a'\eta+a''\rho+a'''\omega)\ x\\ +(b\xi+b'\eta+b''\rho+b'''\omega)\ y\\ +(c\xi+c'\eta+c''\rho+c'''\omega)\ z\\ +(d\xi+d'\eta+d''\rho+d'''\omega)\ w\end{array}\right\}=0,$$

seront les *plans réciproques* du point donné.

Il peut arriver que le plan réciproque d'un point quelconque passe par ce point même; ce qui implique aussi l'identité des deux plans réciproques. Ce cas particulier a été l'objet des recherches de M. Möbius. Je parlerai dans la suite des réciproques de cette espèce en les appelant *Réciproques gauches.*

Mais généralement, pour que les plans réciproques d'un point passent par ce point même, il faut que le point soit situé sur une certaine surface du second ordre; et alors tous les réciproques des points situés sur cette surface seront des plans tangents d'une autre surface du second ordre. Ces deux surfaces pourront être identiques ; ce qui implique aussi l'identité des deux plans réciproques. Ce cas particulier constitue en effet la théorie connue des *Polaires réciproques*.

Je me propose ici d'examiner la théorie du cas général, où les deux surfaces ne sont point identiques. On pourra démontrer que dans ce cas les deux surfaces ont nécessairement en commun quatre droites: ces droites se rencontrent de manière à former un quadrilatère gauche que je représenterai par $ABCD$. Il est évident que les deux surfaces se touchent aux points A, B, C, D. En effet, le plan DAB est le plan tangent de l'une et de l'autre de ces surfaces au point A ; et de même ABC, BCD et CDA sont respectivement les plans tangents aux points B, C et D. Les deux réciproques du point A se réduisent à ce même plan DAB, et il en est également pour les points B, C, D: il suit de là que les droites AC et BD sont réciproques l'une à l'autre, tandis que les droites AB, BC, CD, DA sont respectivement réciproques chacune à elle-même.

Les réciproques d'un point quelconque passent par la droite qui est l'intersection du plan polaire du point par rapport à la première surface, et de la réciproque gauche du point déterminé d'une manière qui sera expliquée tout à l'heure. Donc les réciproques d'un point quelconque de la première surface passent par la droite qui est l'intersection du plan tangent de la première surface au point dont il s'agit, et de la réciproque gauche du même point; de manière que si cette droite d'intersection était connue, les réciproques d'un point de la première surface seraient les plans tangents de la seconde surface menés par cette droite d'intersection ; ou, pour trouver les réciproques d'un point de la première surface, on n'a qu'à chercher la réciproque gauche dont je viens de parler.

Dans ce système de réciproques gauches, les réciproques gauches des points A, B, C, D sont (comme dans le système des réciproques que nous considérons) les plans DAB, ABC, BCD et CAD, et de là les droites AC et DB sont réciproques gauches l'une à l'autre, tandis que les droites AB, BC, CD, DA sont réciproques gauches chacune à elle-même. Mais cela ne suffit pas pour déterminer le système des réciproques gauches. En effet, le système des réciproques que nous considérons n'est pas complètement déterminé au moyen des deux surfaces ; il contient encore une quantité arbitraire (on peut facilement se satisfaire de cela). Or remarquons que la réciproque gauche d'un plan quelconque, passant par la droite AB (ou par l'une quelconque des droites AB, BC, CD, DA), est située dans cette même droite. Considérons un plan donné quelconque pAB passant par cette droite AB; la réciproque gauche de ce plan sera un point P de la droite AB, dont la position pourra être prise à volonté. Au moyen de ce plan pAB et de sa réciproque gauche P, sur la droite AB, on pourra facilement construire le système complète des réciproques gauches. Car soit q un point quelconque, et représentons par Q la réciproque gauche du plan qAB (Q sera aussi un point de la droite AB) ; considérons les quatre plans DAB, CAB, pAB, qAB qui se rencontrent selon la droite AB, et qui ont respectivement pour réciproques gauches les points A, B, P, Q (situés sur cette même droite AB) : le rapport anharmonique des quatre plans sera égal au rapport anharmonique des quatre points; ce qui suffit pour déterminer le point Q, puisque les quatres plans et les trois autres points sont donnés, et la construction graphique pour déterminer ce point Q est parfaitement connue. Il est d'ailleurs évident que la droite menée par un point donné, de sorte qu'elle rencontre des droites réciproques gauches l'une à l'autre, est située dans la réciproque gauche de ce point. Donc, en menant par le point q la droite qui rencontre les deux droites AC et BD, le plan passant par cette droite et par le point Q, est la réciproque gauche du point q qu'il s'agissait de trouver[1]. Également, on pourrait construire la réciproque gauche d'un plan donné.

Donc enfin, pour trouver les réciproques d'un point de la première surface:

(A) "Construisez le plan tangent à ce point de la première surface, et construisez de la manière expliquée ci-dessus, la réciproque gauche du point. Par la droite d'intersection de ces deux plans menez deux plans tangents à la seconde surface: ces deux plans seront les réciproques qu'il s'agissait de trouver."

On pourra construire d'une manière analogue les réciproques d'un plan tangent de la première surface. En effet:

(B) "En construisant les réciproques du point de contact avec la première surface du plan dont il s'agit, les points de contact avec la seconde surface, de ces deux plans, seront les réciproques dont il s'agissait."

Également, pour trouver les réciproques d'un plan tangent donné de la seconde surface:

(C) "Construisez le point de contact de ce plan avec la seconde surface, et construisez la réciproque gauche de ce même plan: la droite menée par ces deux points rencontrera la première surface dans deux points qui seront les réciproques que l'on désirait."

Et pour trouver les réciproques d'un point de la seconde surface:

(D) "Construisez les réciproques du plan tangent passant par le point donné de la seconde surface: les plans tangents à la première surface passant par ces deux points, seront les réciproques qu'il s'agissait de trouver."

En effet les théorèmes (C, D) ne sont que des transformations des théorèmes (A, B) au moyen de la théorie des polaires réciproques.

Enfin, pour trouver les réciproques d'un point quelconque, menez par ce point trois plans tangents ou à la première ou à la seconde surface, et construisez les réciproques de ces plans au moyen du théorème (B ou C): les deux plans menés par ces points réciproques, pris trois et trois ensemble, et combinés de manière que l'intersection des deux plans coïncide avec l'intersection de la polaire par rapport à la première surface et de la réciproque gauche du point donné, selon la remarque ci-dessus, seront les réciproques cherchées; et de la même manière pour les réciproques d'un plan quelconque.

[1] Il y a un cas très simple qui mérite d'être considéré; savoir celui où le point P coïncide avec A. Dans ce cas Q coïncide aussi avec A, et la réciproque gauche de q se réduit au plan qAC. De même, si les points P, B coïncident, la réciproque gauche de q se réduit au plan qBD.

Je n'essaierai pas d'énumérer ici le grand nombre de relations descriptives qui pourraient être tirées des constructions qu'on vient d'expliquer. L'on remarquera sans peine l'analogie parfaite qui existe pour toute cette théorie et la théorie correspondante de la géométrie à deux dimensions, telle que M. Plücker l'a exposée, "System der analytischen Geometrie," [4°, Berlin, 1835], pp. 78—83. On pourra aussi consulter sur ce point un mémoire [61] que je viens de composer pour le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, et qui paraîtra prochainement.

La vérification analytique de ces théorèmes donne lieu à des développements assez intéressants. Pour obtenir l'équation de la première des surfaces du second ordre, il suffit d'écrire ξ, η, ρ, ω au lieu de x, y, z, w, dans l'équation de l'un ou de l'autre des plans réciproques. En supposant que $x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$ soient des plans conjugués par rapport à la surface, et en remarquant que chacune de ces coordonnées peut être censée contenir un facteur constant, l'équation de la première surface peut être écrite sous la forme

$$x^2+y^2+z^2+w^2=0.$$

On aura alors pour a, b, c, d ; a', b', c', d' ; a'', b'', c'', d'' ; a''', b''', c''', d''' un système de la forme $l, -h, g, -a$; $h, l, -f, -b$; $-g, f, l, -c$; a, b, c, l, et les équations des plans réciproques deviendront

$$(\xi x+\eta y+\rho z+\omega w) \pm \sqrt{\begin{array}{l} x(\;\;.\;\; -h\eta+g\rho-a\omega) \\ +y(\;\;h\xi\;\;.\;\; -f\rho-b\omega) \\ +z(-g\xi+f\eta\;\;.\;\; -cw) \\ +w(\;\;a\xi+b\eta+c\rho\;\;.\;\;) \end{array}}=0\,;$$

ce qui prouve le théorème énoncé ci-dessus ; savoir que les deux réciproques passent par la droite d'intersection de la polaire et de la réciproque gauche du point. On obtient sans difficulté, pour l'équation de la seconde surface :

$$(x-hy+gz-aw)^2+(hx+y-fz-bw)^2+(-gx+fy+z-cw)^2+(ax+by+cz+w)^2=0,$$

ou sous une autre forme plus commode :

$$(x^2+y^2+z^2+w^2) \\ +(\,.-hy+gz-aw)^2+(hx\,.-fz-bw)^2+(-gx+fy\,.-cw)^2+(ax+by+cz\,.\,)^2=0.$$

Les coordonnées des points A, B, C, D seront déterminées au moyen des expressions

$$\frac{.-hy+gz-aw}{x}=\frac{hx\,.-fz-bw}{y}=\frac{-gx+fy\,.-cw}{z}=\frac{ax+by+cz\,.}{w},$$

ou, en introduisant la quantité indéterminée s :

$$sx-hy+gz-aw=0,$$
$$hx+sy-fz-bw=0,$$
$$-gx+fy+sz-cw=0,$$
$$ax+by+cz+sw=0.$$

En effet, on démontrera aisément, non seulement que les points définis par ces équations sont situés dans l'intersection des deux surfaces, mais aussi que les deux surfaces se touchent dans ces points-ci; ce qui fait voir qu'en combinant convenablement les quatre points, les deux surfaces doivent se couper (comme nous l'avons déjà avancé), suivant les droites AB, BC, CD, DA.

Je vais examiner encore de plus près le système d'équations qui déterminent ces points. On en tire tout de suite, pour déterminer s, l'équation

$$s^4 + \mu s^2 + \Theta^2 = 0,$$

où l'on a fait pour abréger:

$$\mu = a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2,$$
$$\Theta = af + bg + ch.$$

Supposons encore

$$s^2 f + a\Theta = A, \quad s^2 g + b\Theta = B, \quad s^2 h + c\Theta = C$$

et

$$s^2 a + f\Theta = F, \quad s^2 b + g\Theta = G, \quad s^2 c + h\Theta = H:$$

l'équation qui détermine s, pourra être écrite sous cette autre forme:

$$AF + BG + CH = 0.$$

J'ai trouvé que les équations des droites AC et BD peuvent être présentées sous les formes assez élégantes

$$\left.\begin{array}{llr} -Hy + Gz - Aw &= 0, \\ Hx \quad . \quad - Fz - Bw &= 0, \\ -Gx + Fy \quad . \quad - Cw &= 0, \\ Ax + By + Cz \quad . &= 0, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} -Cy + Bz - Fw &= 0, \\ Cx \quad . \quad - Az - Gw &= 0, \\ -Bx + Ay \quad . \quad - Hw &= 0, \\ Fx + Gy + Hz \quad . &= 0, \end{array}\Bigg\}$$

où chacun de ces systèmes d'équations n'est équivalent qu'à un système de deux équations. En entrechangeant les racines de l'équation en s^2, c'est-à-dire en écrivant $\frac{\Theta^2}{s^2}$ au lieu de s^2, les deux systèmes ne font que s'entrechanger; comme en effet cela doit être.

Enfin, les équations des plans ACD, BAC, ou des plans ABD, BDC peuvent être exprimées sous les formes

$$PQ = (\,.\, - Hy + Gz - Aw)^2 + (Hx\,. - Fz - Bw)^2 + (-Gx + Fy\,. - Cw)^2 + (Ax + By + Cz\,.)^2 = 0,$$
$$RS = (\,.\, - Cy + Bz - Fw)^2 + (Cx\,. - Az - Gw)^2 + (-Bx + Ay\,. - Hw)^2 + (Fx + Gy + Hz\,.)^2 = 0\,;$$

équations desquelles on tire les relations identiques

$$PQ + \ \ RS = -s^2(\mu^2 - 4\Theta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2),$$
$$\Theta^2 PQ + s^4 RS = s^4(\mu^2 - 4\Theta^2)$$
$$\times [(\,.\, - hy + gz - aw)^2 + (hx \ldots fz - bw)^2 + (-gx - fy\,. - cw)^2 + (ax + by + cz\,.)^2],$$

qui mettent en évidence ce que l'on savait déjà, savoir, que les deux surfaces contiennent les droites AB, BC, CD, DA.

Mettons pour un moment, pour abréger:

$$\begin{aligned} . \quad -h\eta + g\rho - a\omega &= l\,, \\ h\xi \quad . \quad -f\rho - b\omega &= m\,, \\ -g\xi - f\eta \quad . \quad -c\omega &= n\,, \\ a\xi + b\eta + c\rho \quad . \quad &= p\,, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation de la réciproque gauche du point $(\xi,\ \eta,\ \rho,\ \omega)$ devient

$$lx + my + nz + pw = 0\,;$$

supposons de plus que, en combinant cette équation avec les équations des droites AC et BD respectivement, on obtient $x : y : z : w = X : Y : Z : W$ et $x : y : z : w = X_, : Y_, : Z_, : W_,$ respectivement. De là on tire

$$\left.\begin{aligned} X &= \quad . \quad - Cm + Bn - Fp\,, \\ Y &= \quad Cl \quad . \quad - An - Gp, \\ Z &= - Bl + Am \quad . \quad - Hp, \\ W &= \quad Fl + Gm + Hn \quad . \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} X_, &= \quad . \quad - Hm + Gn - Ap, \\ Y_, &= \quad Hl \quad . \quad + Fn - Bp, \\ Z_, &= - Gl + Fm \quad . \quad - Cp\,, \\ W_, &= \quad Al + Bm + Cn \quad . \end{aligned}\right\}$$

et de là, identiquement:

$$\begin{aligned} \Theta\,(\Theta^2 - s^4)\,\xi &= \Theta X - s^2 X_,\,, \\ \Theta\,(\Theta^2 - s^4)\,\eta &= \Theta Y - s^2 Y_,\,, \\ \Theta\,(\Theta^2 - s^4)\,\rho &= \Theta Z - s^2 Z_,\,, \\ \Theta\,(\Theta^2 - s^4)\,\omega &= \Theta W - s^2 W_,\,; \end{aligned}$$

ce qui correspond en effet au théorème énoncé ci-dessus, savoir que la réciproque gauche d'un point rencontre les droites AC, BD en deux points tels que la droite passant par ces deux points passe par le point même. Les démonstrations des différents théorèmes d'analyse dont je me sers, n'ont point de difficultés.