69.

SUR LES DÉTERMINANTS GAUCHES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXVIII. (1848), pp. 93—96: continued from t. XXXII. p. 123, 52.]

J'AI nommé "*Déterminant gauche*" un déterminant formé par un système de quantités $\lambda_{r.s}$, qui satisfont aux conditions

$$\lambda_{s.r} = -\lambda_{r.s} \, (r \neq s) \quad \text{.........} \quad (1),$$

(où les valeurs de r, s s'étendent depuis l'unité jusqu'à n).

Or ces déterminants peuvent facilement être exprimés par un système de déterminants pareils, dont les termes satisfont à ces conditions même dans le cas où les valeurs de r et s deviennent égales, ou pour lesquels on a

$$\lambda_{r.s} = -\lambda_{s.r} \, (r \neq s)\,; \quad \lambda_{r.r} = 0 \quad \text{.........} \quad (2)\,;$$

ces déterminants peuvent être nommés "*gauches* et *symétriques*."

En effet, soit Ω le déterminant gauche dont il s'agit, cette fonction peut être présentée sous la forme

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \lambda_{1.1} + \Omega_2 \lambda_{2.2} \ldots + \Omega_{12} \lambda_{1.1} \lambda_{2.2} \ldots \quad \text{.........} \quad (3),$$

où Ω_0 est ce que devient Ω si $\lambda_{1.1}$, $\lambda_{2.2}$, &c. sont réduits à zéro; Ω_1 est ce que devient le coefficient de $\lambda_{1.1}$ sous la même condition, et ainsi de suite; c'est-à-dire: Ω_0 est le déterminant formé par les quantités $\lambda_{r.s}$ en supposant que ces quantités satisfassent aux conditions (2), et en donnant à r les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$; Ω_1 est le determinant formé pareillement en donnant à r, s les valeurs $2, 3, \ldots n$; Ω_2 s'obtient en donnant à r, s les valeurs $1, 3, \ldots n$, et ainsi de suite; cela est aisé de voir si l'on range les quantités $\lambda_{r.s}$ en forme de carré.

Or les déterminants gauches et symétriques (savoir les déterminants dont les termes satisfont aux conditions (2)) se réduisent à zéro pour un *n impair*, et pour un *n pair* aux carrés des fonctions que M. Jacobi a traitées dans son mémoire "Ueber die Pfaff'sche Integrations-Methode" (t. II. [1827], p. 354, de ce journal) et dans le mémoire "Theoria novi multiplicatoris æquationum differentialium" t. XXIX. [1845], p. 236, &c.

En effet, on voit d'abord (par ce que dit M. Jacobi) que le déterminant s'évanouit pour un *n impair*, et que pour un *n* pair il aura pour *facteur* la fonction dont il s'agit; mais je ne sais pas si l'on a déjà remarqué que l'autre facteur se réduit à la même fonction.

On obtient ces fonctions (dont je reprends ici la théorie), par les propriétés générales d'un déterminant, défini de la manière que voici: en exprimant par $(12 \ldots n)$ une fonction quelconque dans laquelle entrent les nombres symboliques $1, 2, \ldots n$, et par $\pm$, le signe correspondant à une permutation quelconque de ces nombres, la fonction

$$\Sigma \pm (12 \ldots n)$$

(où Σ désigne la somme de tous les termes qu'on obtient en permutant ces nombres d'une manière quelconque) est ce qu'on nomme *Déterminant.* On pourrait encore généraliser cette définition en admettant plusieurs systèmes de nombres $1, 2, \ldots n$; $1', 2', \ldots n'$; ... qui alors devraient être permutés indépendamment les uns des autres; on obtiendrait de cette manière une infinité d'autres fonctions, mentionnées (t. XXX. [1846] p. 7). Dans le cas des déterminants ordinaires, auquel je ne m'arrêterai pas ici, on aura $(12 \ldots n) = \lambda_{\alpha.1}\lambda_{\beta.2} \ldots \lambda_{\kappa.n}$. Pour les cas des fonctions dont il s'agit (les fonctions de M. Jacobi), on supposera *n pair*, et l'on écrira

$$(12 \ldots n) = \lambda_{1.2}\lambda_{3.4} \ldots \lambda_{n-1,\,n},$$

où $\lambda_{r.s}$ sont des quantités quelconques qui satisfont aux équations (1). La fonction sera composée d'un nombre $1.2 \ldots n$ de termes; mais parmi eux il n'y aura que $1.3 \ldots (n-1)$ termes différents qui se trouveront répétés $2^{\frac{1}{2}n}(1.2 \ldots \tfrac{1}{2}n)$ fois, et qu'on obtiendra en permutant cycliquement d'abord les $n-1$ derniers nombres, puis les $n-3$ derniers nombres de chaque permutation, et ainsi de suite; le signe étant toujours $+$. Il pourra être démontré, comme pour les déterminants, que ces fonctions changent de signe en permutant deux quelconques des nombres symboliques, et qu'elles s'évanouissent si deux de ces nombres deviennent identiques. De plus, en exprimant par $[12 \ldots n]$ la fonction dont il s'agit, la règle qui vient d'être énoncée, donnera pour la formation de ces fonctions:

$$[12 \ldots n] = \lambda_{1.2}[34 \ldots n] + \lambda_{1.3}[4 \ldots n-2] \ldots + \lambda_{1.n}[23 \ldots (n-1)].$$

Cela posé, revenons aux déterminants gauches et symétriques; et soit d'abord n un nombre impair. Alors le déterminant sera composé de plusieurs termes, chacun multiplié par le produit de l'une des quantités $\lambda_{1.2}, \lambda_{1.3}, \ldots \lambda_{1.n}$ par une des quantités $\lambda_{2.1}, \lambda_{3.1}, \ldots \lambda_{n.1}$. Il est facile de voir que pour chaque terme, multiplié par $\lambda_{1.\alpha}\lambda_{\beta.1}\,(\alpha \neq \beta)$, il existera un terme *égal* et de signe contraire, multiplié par $\lambda_{1.\beta}\lambda_{\alpha.1}$. Or $\lambda_{1.\alpha}\lambda_{\beta.1} = \lambda_{\alpha.1}\lambda_{1.\beta}$: donc ces deux termes se *détruiront*. Restent les termes multipliés par $\lambda_{1.\alpha}\lambda_{\alpha.1}$: le coefficient d'un terme de cette forme sera un déterminant gauche de l'ordre $n-2$, mais précisément de la forme du déterminant même de l'ordre n dont il s'agit. Or n étant impair, $n-2$ le sera également: donc tout déterminant gauche et symétrique s'évanouira, si cela a lieu pour les déterminants pareils d'un ordre inférieur de deux unités. Or pour $n=3$ on a évidemment $\lambda_{1.2}\lambda_{2.3}\lambda_{3.1}+\lambda_{2.1}\lambda_{3.2}\lambda_{1.3}=0$, donc:

"Tout déterminant gauche et symétrique d'un ordre *impair* est zéro."

Soit maintenant n un nombre *pair*. Considérons le déterminant gauche et symétrique plus général qu'on obtient en donnant à r les valeurs $\alpha, 2, 3, \ldots n$, et à s les valeurs $\beta, 2, 3, \ldots n$. En développant cette fonction comme on vient de le faire dans le cas d'un n *impair*, il se présentera d'abord un terme multiplié par $\lambda_{\alpha.\beta}$. Mais ce terme sera un déterminant gauche et symétrique de l'ordre $n-1$ (savoir celui que l'on obtiendrait en donnant à r, s les valeurs $2, 3, \ldots n$), et comme $n-1$ est impair, ce terme s'évanouira. Puis le coefficient de $-\lambda_{\alpha.\alpha'}\lambda_{\beta'.\beta}$ (ou de $\lambda_{\alpha.\alpha'}\lambda_{\beta.\beta'}$) sera le déterminant gauche et symétrique qu'on obtient en donnant à r les valeurs $2, 3, \ldots n$ (α excepté), et à s les valeurs $2, 3, \ldots n$ (β' excepté). En admettant que ce déterminant gauche se réduit à $[(\alpha'+1)\ldots n2\ldots(\alpha'-1)]\,[(\beta'+1)\ldots n2\ldots(\beta'-1)]$, on aura

$$\lambda_{\alpha.\alpha'}[(\alpha'+1)\ldots(\alpha'-1)]\,.\,\lambda_{\beta.\beta'}[(\beta'+1)\ldots(\beta'-1)]$$

pour le terme général, et la somme de tous ces termes se réduira à

$$\{\lambda_{\alpha.2}[34\ldots n]+\lambda_{\alpha.3}[4\ldots n2]+\ldots\}\,.\,\{\lambda_{\beta.2}[34\ldots n]+\lambda_{\beta.3}[4\ldots n2]+\ldots\},$$

ou enfin à $[\alpha 23\ldots n]\;[\beta 23\ldots n]$. Or si le théorème en question a lieu pour $n-2$, il aura lieu aussi pour n. Pour $n=2$ le déterminant est $\lambda_{\alpha.\beta}\lambda_{2.2}-\lambda_{2.\beta}\lambda_{\alpha.2}$, c'est-à-dire $\lambda_{\alpha.2}\lambda_{\beta.2}$ ou $[\alpha 2]\,.\,[\beta 2]$: donc la même chose a toujours lieu et on obtient le théorème que voici:

"Le déterminant gauche et symétrique qu'on obtient en donnant à r les valeurs $\alpha, 2, 3, \ldots n$, et à s les valeurs $\beta, 2, 3, \ldots n$ (où n est *pair*), se réduit à

$$[\alpha 23\ldots n]\,.\,[\beta 23\ldots n]\,;$$

et en particulier, en donnant à r, s les valeurs $1, 2, \ldots n$, ce déterminant se réduit à $[12\ldots n]^2$."

Appliquons ces théorèmes à la réduction de l'équation (3). En supposant pour plus de simplicité $\lambda_{r.r}=1$, on aura pour un n *pair*:

$$\begin{aligned}\Omega = [123\ldots n]^2 + [34\ldots n]^2 &+ [56\ldots n]^2 + \ldots + 1\,;\\ &\vdots\\ &+[24\ldots n]^2\\ &\vdots\end{aligned}$$

et pour un *n impair* :

$$\Omega = \begin{array}{l}[23\ldots n]^2+[45\ldots n]^2+\ldots+1.\\ \qquad\qquad\qquad\vdots\\ \quad +[13\ldots n]^2\\ \qquad\vdots\end{array}$$

Particulièrement pour $n=4$ on obtient :

$$\Omega=[1234]^2+[12]^2+[13]^2+[14]^2+[23]^2+[34]^2+[42]^2+1,$$

$$=(\lambda_{1.2}\lambda_{3.4}+\lambda_{1.3}\lambda_{2.4}+\lambda_{1.4}\lambda_{2.3})^2+\lambda_{1.2}{}^2+\lambda_{1.3}{}^2+\lambda_{1.4}{}^2+\lambda_{3.4}{}^2+\lambda_{4.2}{}^2+\lambda_{2.3}{}^2+1,$$

et pour $n=3$:

$$\Omega=[23]^2+[31]^2+[12]^2+1,$$

$$=\lambda_{2.3}{}^2+\lambda_{3.1}{}^2+\lambda_{1.2}{}^2+1:$$

résultats qui s'accordent parfaitement avec ceux que j'ai donnés dans mon premier mémoire sur ce sujet.

Il serait possible de trouver pour les quantités $\Lambda_{r,s}$ (mémoire cité) des expressions analogues à celles que nous venons de donner pour Ω : mais elles seraient beaucoup plus compliquées.