67.

NOTE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXVII. (1848), pp. 58—60.]

SOIT $x=\sqrt{k}\sin\operatorname{am}u$ et $\alpha=k+\dfrac{1}{k}$: la fonction $\sqrt{k}\sin\operatorname{am}nu$ (où n est un entier), peut être exprimée sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une fonction rationnelle et entière par rapport à x et α. En exprimant ce dénominateur par z, on aura

$$n^2(n^2-1)\,x^2z+(n^2-1)(\alpha x-2x^3)\frac{dz}{dx}+(1-\alpha x^2+x^4)\frac{d^2z}{dx^2}-2n^2(\alpha^2-4)\frac{dz}{d\alpha}=0\ldots\ (1).$$

Cette équation est due à M. Jacobi, (voyez les deux mémoires "Suite des notices sur les fonctions elliptiques," t. III. [1828] p. 306 et t. IV. [1829] p. 185.)

En essayant d'intégrer cette équation à moyen d'une suite ordonnée suivant les puissances de x, et en considérant en particulier les cas $n=2$, 3, 4 et 5, j'ai trouvé que les différentes puissances de α se présentent et disparaissent d'une manière assez bizarre: (voyez mon mémoire "On the theory of elliptic functions," *Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. II. [1847], p. 256, [45].) J'ai reconnu depuis que cela vient de ce que la valeur de z est composée de plusieurs séries indépendantes; une quelconque de ces séries ordonnée selon les puissances descendantes de α va à l'infini; mais, en combinant les différentes séries, les termes qui contiennent les puissances négatives de α se détruisent. Par rapport à x chacune de ces séries ne contient que des puissances paires et positives, car les puissances négatives qui y entrent apparemment, se réduisent toujours à zéro. En effet, on satisfait à l'équation (1) en supposant pour z une expression de la forme

$$z_s=2^{2s(n-2s)}\,\alpha^{s(n-2s)}\,Z_0\ldots+(-1)^q\,2^{2s(n-2s)-2q}\,\alpha^{s(n-2s)-q}\,.\,Z_q\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

(où s est arbitraire). Cela donne pour Z_q l'équation aux différences mêlées:

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2}-(n^2-1)\,x\frac{d}{dx}+2n^2s\,(n-2s)-2n^2q\right]Z_q$$

$$+\left[\left\{n^2(n^2-1)\,x^2+x^4\frac{d^2}{dx^2}-(2n^2-2)\,x^3\frac{d}{dx}\right\}+\frac{d^2}{dx^2}\right]4Z_{q-1}$$

$$-128n^2\left[s\,(n-2s)-q+2\right]Z_{q-2}=0.$$

Pour intégrer cette équation, supposons

$$Z_q=\Sigma\,\frac{Z_q^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(q-\sigma+1)}\,x^{2ns+2q-4\sigma},$$

où la sommation se rapporte à σ et s'étend depuis $\sigma=0$ jusqu'à $\sigma=q$. Toute réduction faite, et ayant mis pour plus de simplicité $n^2-2ns=\lambda$, $2ns=\mu$, on obtient pour Z_q^{σ} l'expression

$$\begin{aligned}4.\quad &\left[-(q-\sigma)\,\lambda-\sigma\mu+(q-2\sigma)^2\right]Z_q^{\sigma}\\ &+(q-\sigma)\,(\lambda-2q+4\sigma+2)\,(\lambda-2q+4\sigma+1)\,Z_{q-1}^{\sigma}\\ &+\sigma\,(\mu+2q-4\sigma+2)\,(\mu+2q-4\sigma+1)\,Z_{q-1}^{\sigma-1}\\ &+16\sigma\,(q-\sigma)\left[\lambda\mu-2\,(q-2)\,(\lambda+\mu)\right]Z_{q-2}^{\sigma-1}=0.\end{aligned}$$

En supposant la valeur de Z_0^0 égale à l'unité, les valeurs de Z_q^{σ} se trouvent complétement déterminées; malheureusement la loi des coefficients n'est pas en évidence, excepté dans le cas de $\sigma=0$, ou $\sigma=q$. En calculant les termes successifs, on obtient

$$\begin{aligned}z_s=\;&(4\alpha)^{s(n-2s)}\,.\,x^{2ns}\\ &-(4\alpha)^{s(n-2s)-1}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1}\lambda\,.\,x^{2ns+2}\\ &+\frac{1}{1}\mu\,.\,x^{2ns-2}\end{aligned}\right.\\ &+(4\alpha)^{s(n-2s)-2}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1\,.\,2}\,\lambda\,(\lambda-3)\,x^{2ns+4}\\ &+\frac{1}{1\,.\,1}\left(\lambda\mu+2-\frac{10\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)x^{2ns}\\ &+\frac{1}{1\,.\,2}\,\mu\,(\mu-3)\,x^{2ns-4}\end{aligned}\right.\\ &-(4\alpha)^{s(n-2s)-3}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\lambda\,(\lambda-4)\,(\lambda-5)\,x^{2ns+6}\\ &+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,1}\,\lambda\left(\mu\,(\lambda-3)+40-\frac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)x^{2ns+2}\\ &+\frac{1}{1\,.\,1\,.\,2}\,\mu\left(\lambda\,(\mu-3)+40-\frac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)x^{2ns-2}\\ &+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\mu\,(\mu-4)\,(\mu-5)\,x^{2ns-6}\end{aligned}\right.\\ &+\;\&c.\end{aligned}$$

On aurait une valeur assez générale de z en multipliant les différentes fonctions z_s chacune par une constante arbitraire, et en sommant les produits; mais dans le cas actuel où z dénote le dénominateur de $\sqrt{k}\sin\operatorname{am} nu$, la valeur convenable de z se réduit à

$$z = z_0 \pm z_1 \ldots \pm z_s \ldots,$$

où s est un nombre entier et positif, entre zéro et $\frac{1}{2}n$ ou $\frac{1}{2}(n-1)$. On aura par exemple dans le cas $n=5$ (les signes étant tous positifs si n est impair, et alternativement positifs et négatifs si n est pair), en supprimant les puissances négatives de α (lesquelles s'entredétruisent):

$$z_0 = 1,$$

$$z_1 = 64\alpha^3 x^{10} - \alpha^2(160x^8 + 240x^{12}) + \alpha(140x^6 + 368x^{10} + 360x^{14}) - (50x^4 + 125x^8 + 300x^{12} + 275x^{16}),$$

$$z_2 = 16\alpha^2 x^{20} - \alpha(80x^{18} + 20x^{22}) + (170x^{16} + 62x^{20} + 5x^{24}),$$

et de là:

$$z = 1 - 50x^4 + 140\alpha x^6 - (125 + 160\alpha^2)x^8 + (368\alpha + 64\alpha^3)x^{10} - (300 + 240\alpha^2)x^{12} + 360\alpha x^{14} - 105x^{16} - 80\alpha x^{18} + (62 + 16\alpha^2)x^{20} - 20\alpha x^{22} + 5x^{24};$$

ce qui est effectivement la valeur de z que j'ai trouvée dans le mémoire cité pour ce cas particulier.