64.

SUR LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. JELLETT, QUI SE RAPPORTE AUX ATTRACTIONS.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tom. XIII. (1848), pp. 264—268.]

Les formules qu'a données M. Jellett pour exprimer les attractions d'un ellipsoïde au moyen de l'expression de la surface de l'ellipsoïde réciproque (t. XI. de ce Journal, [1846], page 92) peuvent s'étendre au cas d'un nombre quelconque de variables.

Pour démontrer cela, je pars de cette formule

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{\phi\left(\dfrac{x^2}{f^2}+\dfrac{y^2}{g^2}\ldots\right)dx\,dy\ldots}{[(a-x)^2+(b-y)^2\ldots+u^2]^{\frac{1}{2}n+q}}\ \left(\text{limites }\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}\ldots=1\right)\\ &\qquad=\frac{fg\ldots\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_\eta^\infty \frac{Ss^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

dans laquelle n est le nombre des variables $x, y, \ldots$, et où

$$S=\frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)}\int_0^1 t^{-q-1}\,\phi\,[\sigma+t\,(1-\sigma)]\,dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

$$\sigma=\frac{a^2}{s+f^2}+\frac{b^2}{s+g^2}\ldots+\frac{u^2}{s},$$

$$1=\frac{a^2}{\eta+f^2}+\frac{b^2}{\eta+g^2}\ldots+\frac{u^2}{\eta},$$

formule due à M. Boole qui l'a démontrée sous une forme un peu différente (*Irish Transactions*, t. XXI.). La modification que j'y ai introduite se trouve démontrée dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. II. p. 223([1]) [44].

[1] Cette formule peut d'ailleurs se déduire comme cas particulier de la formule très-générale de M. Boole que M. Cayley a démontrée dans le cahier précédent. (J. L.); [63].

On déduit de là, en écrivant fx, gy, ... au lieu de x, y, ..., en réduisant à zéro les quantités a, b, ..., u (ce qui donne aussi $\eta = 0$), et en donnant une forme convenable à la fonction ϕ,

$$\int \frac{(x^2+y^2 \ldots)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n}\, dx\, dy \ldots}{(f^2x^2+g^2y^2 \ldots)^2} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}n-3}\, ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(les limites de l'intégrale au premier membre de cette équation étant données par $x^2+y^2 \ldots = 1$).

Donc, en écrivant

$$\Sigma = f^2g^2 \ldots \int \frac{(x^2+y^2 \ldots)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n}\, dx\, dy \ldots}{(f^2x^2+g^2y^2 \ldots)^2},$$

on aura

$$\Sigma = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n} f^2 g^2 \ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}n-3}\, ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Soit Σ' ce que devient Σ en écrivant $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$, ... au lieu de f, g, ... : en écrivant en même temps $\frac{1}{s}$ au lieu de s, on obtient

$$\Sigma' = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)} \frac{1}{fg \ldots} \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5);$$

et de là, en écrivant

$$\frac{1}{f^2}\frac{d}{df}\Sigma' f = F, \quad \frac{1}{g^2}\frac{d}{dg}\Sigma' g = G, \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

on déduit

$$F = \frac{-2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)} \frac{1}{fg \ldots} \int_0^\infty \frac{s}{s+f^2} \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}, \text{ \&c. } \ldots\ldots(7).$$

Cela étant, remarquons que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

est fonction homogène de l'ordre $(2-n)$ par rapport aux quantités f, g, ... (en effet, cela se voit tout de suite en faisant $s = f^2\theta$). Donc

$$\int_0^\infty \left(-\frac{f^2}{s+f^2} - \frac{g^2}{s+g^2} \ldots\right) \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} = (2-n)\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},$$

ou, en écrivant $\frac{s}{s+f^2} - 1$, &c., au lieu de $-\frac{f^2}{s+f^2}$, &c.,

$$\int_0^\infty \left(\frac{s}{s+f^2} + \frac{s}{s+g^2} + \ldots\right) \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} = 2\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \ldots\ldots(9),$$

et de là aussi

$$\int_0^\infty \left(\frac{-s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} = 2f^2\int_0^\infty \frac{1}{s+f^2}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}, \text{ \&c. } (10).$$

Donc enfin

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(1-\frac{a^2}{s+f^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\begin{matrix} \left(\dfrac{s}{s+f^2}+\dfrac{s}{s+g^2}+\ldots\right) \\ -\dfrac{a^2}{f^2}\left(\dfrac{-s}{s+f^2}+\dfrac{s}{s+g^2}+\ldots\right)-\dfrac{b^2}{g^2}\left(\dfrac{s}{s+f^2}+\dfrac{-s}{s+g^2}\ldots\right)-\ldots \end{matrix}\right\}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \end{aligned}\right\} (11),$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(1-\frac{a^2}{s+f^2}-\frac{b^2}{s+g^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)\,.\,fg\ldots}{4\pi^{\frac{1}{2}n}}\left\{\begin{matrix} (F+G+\ldots) \\ -\dfrac{a^2}{f^2}(-F+G+\ldots)-\dfrac{b^2}{g^2}(F-G+\ldots)-\ldots \end{matrix}\right\} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(12).$$

En particularisant d'une manière convenable la formule (1), on obtient, pour le cas de $\dfrac{a^2}{f^2}+\dfrac{b^2}{g^2}\ldots>1$, cette formule connue

$$\left.\begin{aligned} V &= \int \frac{dx\,dy\ldots}{[(a-x)^2+(b-y)^2\ldots]^{\frac{1}{2}n-1}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}fg\ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)}\int_0^\infty \left(1-\frac{a^2}{s+f^2}-\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)\ldots}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

(l'équation des limites étant, comme auparavant, $\dfrac{x^2}{f^2}+\dfrac{y^2}{g^2}+\ldots=1$);

et de là, vu la formule (12), résulte

$$V=-\frac{f^2g^2\ldots}{2(n-2)}\left[(F+G\ldots)-\frac{a^2}{f^2}(-F+G+\ldots)-\frac{b^2}{g^2}(F-G+\ldots)\ldots\right]\ldots(14).$$

L'expression de Σ, en écrivant $r\cos\alpha$, $r\cos\beta,\ldots$ au lieu de $x, y,\ldots$, remplaçant $dx\,dy\ldots$ par $r^{n-1}\,dr\,dS$, et intégrant depuis $r=0$ jusqu'à $r=1$, se réduit à

$$\Sigma=f^2g^2\ldots\int\frac{dS}{(f^2\cos^2\alpha+g^2\cos^2\beta+\ldots)^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15),$$

de sorte qu'au cas de $n=3$ cette fonction se réduit à l'expression qu'a donnée M. Jellett pour la surface d'un ellipsoïde. Donc, en se rappelant que les attractions sont représentées par $\dfrac{dV}{da}$, $\dfrac{dV}{db}$, $\dfrac{dV}{dc}$, on voit que l'équation (14) équivaut, pour ce cas, aux formules de M. Jellett.

Remarquons, qu'en transformant l'intégrale (4) de la même manière dont nous avons transformé l'intégrale (8), on obtient

$$\Sigma = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} f^2 g^2 \ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n - 1)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+f^2} + \frac{1}{s+g^2} \ldots\right) \frac{s^{\frac{1}{2}n-2}\, ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(16),$$

ce qui donne pour $n=3$ cette expression très-simple de la surface de l'ellipsoïde aux demi-axes f, g, h,

$$\Sigma = \pi f^2 g^2 h^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+f^2} + \frac{1}{s+g^2} + \frac{1}{s+h^2}\right) \frac{s^{-\frac{1}{2}}\, ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)(s+h^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(17),$$

formule qui se vérifie tout de suite au cas de $f=g=h$.

L'expression encore plus simple que donne l'équation (4), savoir,

$$\Sigma = -\pi f^2 g^2 h^2 \int_0^\infty \frac{s^{-\frac{3}{2}}\, ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)(s+h^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18),$$

n'est pas exempte de difficulté à cause de la valeur apparemment infinie du second membre de l'équation.

Au cas d'une sphère, cela se réduit à

$$\Sigma = -\pi f^2 \int_0^\infty \frac{s^{-\frac{3}{2}}\, ds}{(1+s)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui serait, en effet, exact si la formule

$$\int_0^\infty \frac{s^{m-1}\, ds}{(1+s)^{m+n}} = \frac{\Gamma m\, \Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

subsistait pour les valeurs négatives de m. Cela nous apprend que les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{s^{-q-1}\, ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

ne sont pas à rejeter au cas des valeurs positives de q; il est même facile, en répétant continuellement le procédé de réduction que nous venons d'employer, de présenter ces intégrales sous une forme où il n'y a plus de terme infini. En m'aidant de l'analogie de quelques formules qui se trouvent dans mon Mémoire *Sur quelques formules du calcul intégral* (t. XI. de ce Journal, p. 231 [49]), je crois même pouvoir avancer que cette intégrale doit se remplacer par

$$\frac{-1}{2\sin q\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k+si)^{-q-1}\, ds}{\sqrt{(k+si+f^2)(k+si+g^2)\ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

où, comme à l'ordinaire, $i=\sqrt{-1}$, et où k dénote une quantité quelconque dont la partie réelle ne s'évanouit pas. Mais je renvoie cette discussion à une autre occasion.