55.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DE POSITION.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tome XXXIV. (1847), pp. 270—275. Continued from t. XXXI. p. 227, **50**.]

§ III.

LORSQUE j'avais sous la plume la première partie de ce mémoire, je ne savais pas que la dernière partie du théorème de M. Steiner sur l'hexagramme de Pascal (savoir que les vingt points d'intersection des soixante droites sont situés, par quatre, dans quinze droites) avait déjà été démontrée d'une manière aussi simple qu'élégante par M. Plücker dans son mémoire, "*Über ein neues Princip der Geometrie*" (t. V. [1828] p. 269). En supposant maintenant cette démonstration connue, je veux examiner de plus près la corrélation de ces vingt points, en adoptant une notation plus commode.

Soit $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 : cette permutation peut être nommée *directe* ou *inverse*, selon qu'elle est formée par un nombre pair ou impair d'inversions. Des six permutations $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$, $\alpha\delta\gamma\zeta\epsilon\beta$, $\alpha\zeta\gamma\beta\epsilon\delta$; $\alpha\delta\gamma\beta\epsilon\zeta$, $\alpha\beta\gamma\zeta\epsilon\delta$, $\alpha\zeta\gamma\delta\epsilon\beta$, les trois premières ou les trois dernières sont *directes.* Nous représenterons les trois permutations directes par $(\alpha\gamma\epsilon)$. Les trois droites que donne le théorème de Pascal, appliqué aux hexagones correspondants à ce symbole, se coupent dans un des vingt points dont il s'agit: point qui peut être représenté par la même notation $(\alpha\gamma\epsilon)$. En supposant que $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ est une permutation directe, le point $\alpha\gamma\epsilon$ correspond au point $\binom{\alpha\gamma\epsilon}{\beta\delta\zeta}$ de M. Plücker. Partout dans cette section on pourra changer les mots "directe" et "inverse."

Les six permutations des lettres α, γ, ϵ ne donnent qu'un seul point ; de manière que les vingt points, dont il s'agit, sont

$$\begin{matrix} 123, & 124, & 125, & 126, & 134, & 135, & 136, & 145, & 146, & 156, \\ 234, & 235, & 236, & 245, & 246, & 256, & 345, & 346, & 356, & 456. \end{matrix}$$

Or, pour trouver comment il faudra combiner ces points, j'écris

$$\begin{matrix} \alpha\gamma\epsilon \\ \beta\delta\zeta \end{matrix}$$

et je tire de là le système

$$\begin{matrix} \alpha\gamma\epsilon \\ \beta\delta\zeta \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \alpha\delta\zeta \\ \beta\gamma\epsilon \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \beta\gamma\zeta \\ \alpha\delta\epsilon \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \beta\delta\epsilon \\ \alpha\gamma\zeta \end{matrix}.$$

Les quatre points

$$\alpha\gamma\epsilon, \quad \alpha\delta\zeta, \quad \beta\gamma\zeta, \quad \beta\delta\epsilon$$

seront situés sur la même droite, que l'on peut représenter par $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta \,.\, \epsilon\zeta$. Les quinze combinaisons, quatre à quatre, des vingt points, seront

$$A. \left\{ \begin{array}{llllll} 135, & 146, & 236, & 245 & \text{dans la droite} & 12.34.56 \\ 136, & 154, & 234, & 256 & \text{„ „ „} & 12.35.64 \\ 134, & 165, & 235, & 264 & \text{„ „ „} & 12.36.45 \\ 146, & 152, & 342, & 356 & \text{„ „ „} & 13.45.62 \\ 142, & 165, & 345, & 362 & \text{„ „ „} & 13.46.25 \\ 145, & 126, & 346, & 325 & \text{„ „ „} & 13.42.56 \\ 152, & 163, & 453, & 462 & \text{„ „ „} & 14.56.23 \\ 153, & 126, & 456, & 423 & \text{„ „ „} & 14.52.36 \\ 156, & 132, & 452, & 436 & \text{„ „ „} & 14.53.62 \\ 163, & 124, & 564, & 523 & \text{„ „ „} & 15.62.34 \\ 164, & 132, & 562, & 534 & \text{„ „ „} & 15.63.42 \\ 162, & 143, & 563, & 542 & \text{„ „ „} & 15.64.23 \\ 124, & 135, & 625, & 634 & \text{„ „ „} & 16.23.45 \\ 125, & 143, & 623, & 645 & \text{„ „ „} & 16.24.53 \\ 123, & 154, & 624, & 653 & \text{„ „ „} & 16.25.34, \end{array} \right.$$

où les droites s'obtiennent en permutant dans 12 . 34 . 56 d'abord les derniers trois numéros et puis dans ces trois permutations les derniers cinq numéros. Par là la manière de trouver les droites est claire.

Cette énonciation des points et des droites, dont il s'agit, en même temps qu'elle est parfaitement symétrique, est la seule qui se présente naturellement. Cependant la symétrie en est si compliquée et si peu manifeste qu'il sera bon d'adopter une autre notation. Pour cela, je forme le tableau auxiliaire suivant, dont l'arrangement est assez clair :

135	*ace*	351	*cea*	513	*eac*
246	*bdf*	246	*fbd*	246	*dfb*
146	*acb*	346	*cef*	546	*ead*
235	*edf*	251	*abd*	213	*cfb*
236	*acd*	256	*ceb*	216	*eaf*
145	*bef*	341	*fad*	543	*dcb*
245	*acf*	241	*ced*	243	*eab*
136	*bde*	356	*fba*	516	*dfc*

De là, en écrivant

$$B.\left\{\begin{array}{ll} 123 = bcf\,, & 234 = abe\,, \\ 124 = cde\,, & 235 = def\,, \\ 125 = abd\,, & 236 = acd\,, \\ 126 = aef\,, & 245 = acf\,, \\ 134 = adf\,, & 246 = bdf\,, \\ 135 = ace\,, & 256 = bce\,, \\ 136 = bde\,, & 345 = bcd\,, \\ 145 = bef\,, & 346 = cef\,, \\ 146 = abc\,, & 356 = abf\,, \\ 156 = cdf\,, & 456 = ade\,; \end{array}\right.$$

et de plus

$$C.\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l|l|l} 12.34.56 = ac\,, & 13.45.62 = ab\,, & 14.56.23 = bd\,, \\ 12.35.64 = be\,, & 13.46.25 = cd\,, & 14.52.36 = ae\,, \\ 12.36.45 = df\,, & 13.42.56 = ef\,, & 14.53.62 = cf\,, \end{array} \\ \begin{array}{l|l} 15.62.34 = de\,, & 16.23.45 = ce\,, \\ 15.63.42 = bc\,, & 16.24.53 = ad\,, \\ 15.64.23 = ef\,, & 16.25.34 = bf\,; \end{array} \end{array}\right.$$

savoir (en représentant les points 123, 124, &c., par *bcf*, *cde*, &c., et les droites 12.34.56, 12.35.64, &c., par *ac*, *be*, &c.) on verra dans le tableau (*A*) que les points situés dans la droite *ac* sont *ace*, *acb*, *acd*, *acf*, que les points dans la droite *be* sont *bed*, *bef*, *bea*, *bec*, et ainsi de suite, de manière que ce système des vingt points et des quinze droites est précisément le système *réciproque* de celui des quinze points et des vingt droites que nous avons considéré dans la première section de ce mémoire; ou, autrement dit, que les vingt points et les quinze droites sont les projections sur un plan, des points et des droites d'intersection de six plans dans l'espace. Seulement la figure plane, ainsi formée, contient quatorze quantités arbitraires, tandis que le système de six points sur une conique n'en contient que onze, de sorte qu'il doit y avoir des relations entre ces six plans. On obtient donc la forme suivante plus complète du théorème de M. Steiner (théorème qui en même temps est le complément du théorème XII. § 1 de ce mémoire).

THÉORÈME XIV. "Les soixante droites correspondantes aux hexagones formés par six points d'une conique se coupent trois à trois dans vingt points qui peuvent être considérés comme les projections des points d'intersection d'un système de six plans (dont d'ailleurs la liaison reste encore à chercher)."

Également

THÉORÈME XIII. "Les soixante points correspondants aux hexagones formés par six tangentes d'une conique sont situés trois à trois sur vingt droites déterminées par des plans qui passent par trois points quelconques d'un système de six points dans l'espace (la liaison de ce système de six points étant encore à chercher)."

§ IV.

Soient a, f; b, g; c, h les points correspondants d'un système de points situés sur la même droite, et en involution. Nommons "*faisceau*" les trois côtés d'un quadrilatère qui se coupent dans un même point et "*triangle*" les trois côtés qui ne se coupent pas dans un même point (de sorte que dans tout quadrilatère il y aura quatre *faisceaux* et quatre *triangles*). Les quadrilatères dont les côtés passent par les six points en involution, peuvent être classés en deux systèmes: Dans le premier les faisceaux passeront par f, g, h; f, b, c; g, c, a; h, a, b, et les triangles par a, b, c; a, g, h; b, h, f; c, f, g; dans l'autre il en sera le contraire. Deux quadrilatères qui appartiennent à ces deux systèmes respectivement, peuvent être dits "en rapport inverse l'un à l'autre." Soient $ABCD$, $A'B'C'D'$ deux quadrilatères non situés dans le même plan, et soumis à la condition que les côtés

$$DA,\ B'C';\ DB,\ C'A';\ DC,\ A'B';\ BC,\ D'A';\ CA,\ D'B';\ AB,\ D'C'$$

coupent la droite dans les points

$$f,\ g,\ h,\ a,\ b,\ c$$

respectivement. Les deux tétraèdres $A'BCD$, $AB'C'D'$, et également les tétraèdres $AB'CD$ et $A'BC'D'$; $ABC'D$ et $A'B'CD'$; $ABCD'$ et $A'B'C'D$ seront respectivement inscrits et circonscrits l'un à l'autre. Car en considérant par exemple ces deux-ci: $A'BCD$, $AB'C'D'$: A' est dans le plan $B'C'D'$, B est dans le plan $C'D'A$ (parce que les droites AB, $C'D'$ se rencontrent); C est dans le plan $D'AB'$ (parce que AC et $B'D'$ se rencontrent), et D est dans le plan $AB'C'$ (parce que AD et $B'C'$ se rencontrent). Également A, B', C', D'

sont situés dans les plans BCD, CDA', $DA'B$ et $A'BC$ respectivement; et cela vérifie la relation dont il s'agit. Ce théorème est dû à M. Möbius qui l'a obtenu par son Calcul Barycentrique (ce Journal, t. III. [1828], p. 273), et en considérant un système polaire dans lequel le plan réciproque d'un point quelconque passe toujours par le point même (Statik, c. VI. § 86, et ce Journal t. x. [1833], p. 317). On trouve aussi quelques remarques sur ce sujet dans l'ouvrage "*Systematische Entwickelungen u. s. w.*" de M. Steiner, p. 247. Je ne croyais pas inutile d'en faire voir la relation avec la théorie de l'involution. Remarquons aussi que non seulement les quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$, mais aussi ceux-ci $ABC'D'$ et $A'B'CD$, $ACB'D'$ et $A'C'BD$, $ADB'C'$ et $A'D'BC$ sont en rapport inverse entre eux. Par cela la symétrie de la figure est complétée; mais on n'en tire pas de nouveaux systèmes de tétraèdres inscrits et circonscrits.

M. Möbius a démontré qu'il n'existe pas des quadrilatères réels simples, à quatre côtés et quatre angles, inscrits et circonscrits. Mais en considérant les points imaginaires, l'existence en est possible, et on trouve des systèmes de cette sorte parmi les neuf points d'inflexion d'une courbe de troisième ordre. Je renvoie cette discussion à une autre occasion, § V.

Je me bornerais, sans examiner de plus près la figure qui en résulte, à démontrer le théorème suivant: "Si un point et n droites sont donnés, les points d'intersection de chaque droite avec la polaire du point, relative aux autres $n-1$ droites, sont situés sur une même droite polaire du point, relative au système des droites." Je prends un système de droites, considéré comme formant une courbe, et j'entends par polaire ou droite polaire, la dernière des polaires successives du point, relative à la courbe. En représentant analytiquement la courbe par $V=0$, V est une fonction homogène d'un ordre quelconque en x, y, z; et si $\alpha:\beta:\gamma$ sont les valeurs de $x:y:z$ relatives au point, l'équation

$$(\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z)^{p-1}U=0$$

est celle de l'une quelconque des polaires successives.

Soit $p=0$, $q=0$, $r=0$, ... les équations des droites, p, q, r, ... seront des fonctions linéaires de x, y, z. Soient comme plus haut $x:y:z=\alpha:\beta:\gamma$ les équations qui déterminent le point: l'équation de la droite polaire du point, relative aux n droites, est

$$(\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z)^{n-1}\,pqr\ldots=0.$$

Soient a, b, c, ... ce que deviennent p, q, r, ... en écrivant α, β, γ, ... au lieu de x, y, z, ..., on obtient aisément

$$\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z=a\partial_p+b\partial_q+\ldots;$$

et de là on tire

$$(a\partial_p+b\partial_q+c\partial_r+\ldots)^{n-1}\,pqr\ldots=0,$$

pour la polaire cherchée. Les différentiations étant effectuées selon p, q, r, ..., comme variables indépendantes, on obtient

$$pbc\ldots+aqc\ldots+\ldots=0$$

ou, ce qui est la même chose:

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}+\ldots=0.$$

De même la polaire du point, relative aux droites $q=0$, $r=0$, ... , est

$$\frac{q}{b}+\frac{r}{c}+\ldots=0,$$

et par cette raison l'intersection de cette droite avec $p=0$ est évidemment située sur la droite polaire du point, relative à toutes les droites; ce qui prouve la proposition dont il s'agit.

Par exemple, en considérant les droites BC, CA, AB qui passent par trois points A, B, C: la polaire d'un point O, relative aux droites AB, AC, est une droite $A\alpha$ telle que AB, AC; AO, $A\alpha$ forment un faisceau harmonique. Soit α le point d'intersection de $A\alpha$ et BC, et supposons le même pour les points β, γ: les points α, β, γ seront situés (comme on le sait) sur une même droite, qui est celle que je nomme *polaire* de O, relative aux côtés du triangle, et que M. Plücker a nommé "*harmonicale*." On sait de plus que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ peuvent être construites comme suit: en prenant a, b, c pour les points d'intersection de OA, OB, OC avec BC, CA, AB respectivement, les droites bc, BC; ca, CA; ab, AB se rencontreront dans les points α, β, γ; ce qui offre une règle facile pour construire la polaire d'un point, relative à un nombre quelconque de droites.

Remarquons en finissant que la conique qui passe par les points A, B, C, et qui touche deux des trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, touche aussi la troisième et est effectivement la polaire conique du point, relative aux trois côtés du triangle. En combinant cela avec la propriété connue que la $r^{\text{ième}}$ polaire de O', relative à la même courbe, passe par O, si la $(n-r)^{\text{ième}}$ polaire d'un point O, relative à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, passe par un point O', on obtiendra le théorème 22 de M. Steiner (ce Journal, t. IV. [1828] p. 209).