51.

PROBLÈME DE GÉOMETRIE ANALYTIQUE.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXI. (1846), pp. 227—230.]

Trouver explicitement les coordonnées des centres de similitude de deux surfaces du second ordre, dont chacune est circonscrite à une même surface de cet ordre.

LEMME.

Soit

$$U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy + 2Lxw + 2Myw + 2Nzw + Pw^2 \ldots\ldots (1),$$

l'expression générale d'une fonction homogène du second ordre à quatre variables, et considérons les dérivées

$$KU = \begin{vmatrix} A, & H, & G, & L \\ H, & B, & F, & M \\ G, & F, & C, & N \\ L, & M, & N, & P \end{vmatrix}, \qquad F_{po}U = \begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \rho, & \omega \\ \alpha, & A, & H, & G, & L \\ \beta, & H, & B, & F, & M \\ \gamma, & G, & F, & C, & N \\ \delta, & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

où dans $F_{po}U$ les lettres o, p écrites en bas servent à indiquer les variables $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ξ, η, ρ, ω qui doivent entrer dans l'expression de cette fonction; par exemple $F_{pp}U$ est ce que devient $F_{po}U$, en écrivant ξ, η, ρ, ω au lieu de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Cela posé, soit

$$U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy + 2Lxw + 2Myw + 2Nzw + 2Pw^2, \ldots (3),$$

$$V = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

on aura cette équation identique:

$$F_{pp}(U+V^2)\,KU - F_{pp}(U)\,K(U+V^2) = (F_{op}U)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

qui subsiste même pour un nombre quelconque de variables.

L'expression analytique du théorème consiste en effet en ce que les réciproques de deux surfaces du second ordre, circonscrites l'une à l'autre, sont deux surfaces du second ordre qui ont cette même relation. Car en prenant $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ pour les coordonnées d'un point, les équations de deux surfaces circonscrites l'une à l'autre sont

$$\left.\begin{aligned} U &= 0,\\ U+V^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Les équations de leurs réciproques polaires (par rapport à $x^2+y^2+z^2+w^2=0$) sont

$$F_{pp}U=0, \quad F_{pp}(U+V^2)=0,$$

c'est-à-dire, et vertu du théorème qui vient d'être posé:

$$F_{pp}U=0, \qquad K(U+V^2)\,F_{pp}U + (F_{op}U)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

où $K(U+V^2)$ est constant; c'est-à-dire les premières parties des équations ne diffèrent entre elles que par le carré de la fonction linéaire $(F_{op}U)$; ce qui prouve le théorème en question.

Solution.

Soient $$U+V_1^2=0 \text{ et } U+V_2^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

les équations des deux surfaces, dont chacune est circonscrite à $U=0$. Les expressions de V_1 et V_2 sont

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 w,\\ \text{et}\quad V_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 w, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

et les lettres o_1, o_2 écrites en bas se rapporteront à α_1, β_1, γ_1, δ_1 et à α_2, β_2, γ_2, δ_2 respectivement. Mettons de plus, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} K(U+V_1^2) &= K_1,\\ K(U+V_2^2) &= K_2, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Les polaires des deux surfaces ont pour équations

$$\left.\begin{aligned} K_1 F_{pp}(U) + (F_{o_1p}U)^2 &= 0,\\ K_2 F_{pp}(U) + (F_{o_2p}U)^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

et ces surfaces polaires se rencontrent évidemment selon les courbes situées dans les plans exprimés par les équations

$$\sqrt{K_2}\,F_{o_1p}U \pm \sqrt{K_1}\,F_{o_2p}U = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12);$$

équations qu'on peut écrire sous cette forme très simple:

$$F_{o'p}(U) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

en mettant

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \sqrt{K_2}\,\alpha_1 \pm \sqrt{K_1}\,\alpha_2, \\ \beta' &= \sqrt{K_2}\,\beta_1 \pm \sqrt{K_1}\,\beta_2, \\ \gamma' &= \sqrt{K_2}\,\gamma_1 \pm \sqrt{K_1}\,\gamma_2, \\ \delta' &= \sqrt{K_2}\,\delta_1 \pm \sqrt{K_1}\,\delta_2, \end{aligned}\right\} \quad \text{..............................} \quad (14),$$

et supposant que o' se rapporte à α', β', γ', δ'. On a enfin, en se servant de la notation complète des déterminants,

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \rho, & \omega \\ \alpha', & A, & H, & G, & L \\ \beta', & H, & B, & F, & M \\ \gamma', & G, & F, & C, & N \\ \delta', & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} = 0 \quad \text{..............................} (15),$$

équation qui est double, à cause des doubles valeurs de α', β', γ', δ'. Les pôles de ces plans sont les centres de similitude des deux surfaces données. Soit donc identiquement

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \rho, & \omega \\ \alpha', & A, & H, & G, & L \\ \beta', & H, & B, & F, & M \\ \gamma', & G, & F, & C, & N \\ \delta', & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} = \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\rho + \mathfrak{D}\omega \ \ldots (16),$$

on a

$$x : y : z : w = \mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} : \mathfrak{D} \quad \text{..............................} (17),$$

pour les coordonnées $\dfrac{x}{w}$, $\dfrac{y}{w}$, $\dfrac{z}{w}$ des deux centres de similitude. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sont données par l'équation (16), savoir par

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} . & 1 & . & . & . \\ \alpha', & A, & H, & G, & L \\ \beta', & H, & B, & F, & M \\ \gamma', & G, & F, & C, & N \\ \delta', & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} \text{ ou } \mathfrak{A} = -\begin{vmatrix} \alpha', & H, & G, & L \\ \beta', & B, & F, & M \\ \gamma', & F, & C, & N \\ \delta', & M, & N, & P \end{vmatrix}, \text{\&c.} \quad (18),$$

α', β', γ', δ' sont donnés par (14), et K_1, K_2 représentent ce que devient le déterminant

$$\begin{vmatrix} A, & H, & G, & L \\ H, & B, & F, & M \\ G, & F, & C, & N \\ L, & M, & N, & P \end{vmatrix} \quad \text{..............................} (19),$$

en écrivant $A+\alpha_1^2$, $B+\beta_1^2$, $C+\gamma_1^2$, $P+\delta_1^2$, $F+\beta_1\gamma_1$, $G+\gamma_1\alpha_1$, $H+\alpha_1\beta_1$, $L+\alpha_1\delta_1$, $M+\beta_1\delta_1$, $N+\gamma_1\delta_1$, ou $A+\alpha_2^2$, &c. au lieu de A, B, C, P, F, G, H, L, M, N.