48.

NOTE SUR LES FONCTIONS DE M. STURM.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tom. XI. (1846), pp. 297—299.]

On sait que la suite des fonctions

$$\begin{aligned} fx &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots, \\ f_1x &= \Sigma\,(x-b)(x-c)(x-d)\ldots, \\ f_2x &= \Sigma\,(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots, \\ f_3x &= \Sigma\,(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(x-d)\ldots, \end{aligned}$$

est de la plus grande utilité dans la théorie de la résolution numérique des équations. En effet, on obtient tout de suite à leur moyen le nombre de racines réelles comprises entre deux limites quelconques. Il était donc intéressant de chercher la manière d'exprimer ces fonctions par les coefficients de fx.

Soit, pour cela, m un nombre quelconque, pas plus grand que le degré n de cette fonction. En prenant k pour $m^{\text{ième}}$ racine de la suite $a, b, c, \ldots$, et mettant, pour abréger,

$$P = (-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k),$$

cela donne

$$f_mx : fx = \sum \frac{P^2}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)},$$

dans laquelle expression

$$P = \left| \begin{array}{llll} 1, & a, \ldots, & a^{m-1}, \\ 1, & b, \ldots, & b^{m-1}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 1, & k, \ldots, & k^{m-1}, \end{array} \right|$$

et, de plus,

$$\frac{P}{(x-a)(x-b)\dots(x-k)} = (-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\left[\frac{(b-c)\dots(b-k)\dots(j-k)}{(x-a)} + \dots\right],$$

dans laquelle le coefficient de x^{-r} est égal à

$$(-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\,[a^{r-1}(b-c)\dots(b-k)\dots(j-k)+\dots],$$

c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} 1, & a, \dots, & a^{m-2}, & a^{r-1} \\ 1, & b, \dots, & b^{m-2}, & b^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & k, & k^{m-2}, & k^{r-1} \end{vmatrix}$$

Donc enfin le coefficient de x^{-r} dans $f_m x : fx$ est égal à

$$\sum \begin{vmatrix} 1, & a, \dots, & a^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1, & k, \dots, & k^{m-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1, & a, \dots, & a^{m-2}, & a^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & k, \dots, & k^{m-2}, & k^{r-1} \end{vmatrix}$$

où, au moyen d'une propriété connue des déterminants, en représentant comme à l'ordinaire par S_q la somme des $q^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les racines, ce coefficient devient égal à

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \dots, & S_{m-2}, & S_{r-1} \\ S_1, & S_2, \dots, & S_{m-1}, & S_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m-1}, & S_m, \dots, & S_{2m-3}, & S_{r+m-2} \end{vmatrix}$$

De là, en mettant

$$T_q = \sum \frac{a^q}{x-a},$$

$$f_m x : fx = \begin{vmatrix} S_0, & S_1, \dots, & S_{m-2}, & T_0 \\ S_1, & S_2, \dots, & S_{m-1}, & T_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m-1}, & S_m, \dots, & S_{2m-3}, & T_{m-1} \end{vmatrix}$$

en multipliant par fx, et mettant

$$Q_{m,\,r} = S_{m+r-1} - p_1 S_{m+r-2} \dots + (-)^r p_r S_{m-1},$$

où l'on suppose

$$fx = x^n - p_1 x^{n-1} \dots + (-)^n p_n,$$

on obtient

$$f_m x = \sum\nolimits_r x^{n-m-r} \begin{vmatrix} S_0, & S_1, \dots, & S_{m-2}, & Q_{m,\,r} \\ S_1, & S_2, \dots, & S_{m-1}, & Q_{m+1,\,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m-1}, & S_m, \dots, & S_{2m-3}, & Q_{2m-1,\,r} \end{vmatrix}$$

où r peut ne s'étendre que depuis 0 jusqu'à $n-m$, puisque $f_m x$ est fonction entière. Au moyen des relations connues qui existent entre les quantités S_q, on a

$$Q_{m+s,r} = (-)^r p_{r+1} S_{m+s-2} \dots + (-)^{n-1} p_n S_{r+m+s-n-1} \dots \quad [r+m+s>n],$$

$$Q_{m+s,r} = (-)^r p_{r+1} S_{m+s-2} \dots + (-)^{r+m+s-3} p_{r+m+s-2} S_1$$
$$+ (-)^{r+m+s-2} p_{r+m+s-1} (r+m+s-1) \dots\dots\dots \left[r+m+s \overset{=}{<} n \right],$$

et de là, en posant

$$Q'_{m+s,r} = (-)^{r+m-1} p_{r+m} S_{s-1} \dots + (-)^{n-1} p_n S_{r+m+s-n-1} \dots [r+m+s>n],$$

$$Q'_{m+s,r} = (-)^{r+m-1} p_{r+m} S_{s-1} \dots + (-)^{r+m+s-3} p_{r+m+s-2} S_1$$
$$+ (-)^{r+m+s-2} p_{r+m+s-1} (r+m+s-n-1) \dots \left[r+m+s \overset{=}{<} n \right],$$

on peut, par les propriétés des déterminants, réduire $Q_{m+s,r}$ à $Q'_{m+s,r}$ dans l'expression de $f_m x$. Nous avons donc exprimé cette fonction au moyen des coefficients p_1, p_2, ... et des sommes S_1, S_2, ..., S_{2m-3}, lesquelles s'expriment facilement par ces mêmes coefficients (et pour calculer $f_1 x$, $f_2 x$, ..., $f_n x$, on aurait seulement besoin de calculer ces sommes une fois pour toutes jusqu'à S_{2n-3}) ; il serait donc facile de former des tables de ces fonctions, pour les équations d'un degré quelconque, ce qui pourrait à peine s'effectuer d'aucune autre manière.