47.

SUR LA SURFACE DES ONDES.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tom. XI. (1846), pp. 291—296.]

La surface des ondes est un cas particulier d'une autre surface à laquelle on peut donner le nom de *tétraédroïde*, et dont voici la propriété fondamentale :

"Le tétraédroïde est une surface du quatrième ordre, qui est coupée par les plans d'un certain tétraèdre suivant des paires de coniques par rapport auxquelles les trois sommets du tétraèdre dans ce plan sont des points conjugués. De plus : les seize points d'intersection des quatre paires de coniques sont des points singuliers de la surface, c'est-à-dire des points où, au lieu d'un plan tangent, il y a un cône tangent du second ordre."

On verra plus loin que la surface eût été suffisamment définie en disant qu'un seul de ces points était un point singulier ; l'existence des quinze autres points singuliers est donc une propriété assez remarquable. Mais, avant d'aller plus loin, il convient de rappeler la signification des points conjugués par rapport à une conique : cela veut dire que la polaire de chacun des trois points passe par les deux autres. Parmi les propriétés d'un tel système, on peut citer celle-ci :

"Les points d'intersection de deux coniques, par rapport auxquelles les mêmes trois points sont des points conjugués, sont situés deux à deux sur six droites, lesquelles passent deux à deux par ces trois points."

De là : "Les quatre points singuliers compris dans chaque face du tétraèdre sont situés deux à deux sur trois paires de droites, lesquelles passent par les trois sommets dans cette face."

Autrement dit, les seize points singuliers sont situés deux à deux sur vingt-quatre droites, lesquelles passent six à six par les sommets et sont situées six à six dans les plans du tétraèdre. Donc, en considérant les six droites qui passent par le même sommet, par ces droites combinées deux à deux, il passe quinze plans, y compris trois plans du tétraèdre; en excluant ceux-ci, il y a pour chaque sommet douze plans, chacun desquels passe par quatre points singuliers; donc la courbe d'intersection d'un de ces plans avec la surface a quatre points doubles, ce qui ne peut pas arriver pour une courbe du quatrième ordre, à moins qu'elle ne se réduise à deux coniques.

Donc: "Il y a, outre les plans du tétraèdre, quarante-huit plans, douze par chaque sommet, lesquels rencontrent la surface suivant des paires de coniques."

On pourrait de même chercher combien il y a de plans qui rencontrent la surface suivant des courbes avec trois points doubles, &c. Passons aux cônes circonscrits; on démontre facilement par l'analyse cette propriété:

"Les cônes circonscrits à la surface ayant pour sommets les sommets du tétraèdre, se réduisent à des paires de cônes du second ordre, lesquelles la touchent suivant les deux coniques de la face opposée."

De plus: "Les seize plans qui touchent quatre à quatre ces paires de cônes sont des plans tangents singuliers, dont chacun touche la surface suivant une conique."

Il y a de plus, entre ces plans, des relations analogues à celles qui existent entre les points singuliers, de manière que l'on déduit de même le théorème:

"Il y a quarante-huit points, douze à douze dans les quatre plans du tétraèdre, pour chacun desquels les cônes circonscrits se réduisent à des paires de cônes du second ordre."

Ajoutons que ces quarante-huit points correspondent d'une manière particulière aux quarante-huit plans, et que les cônes circonscrits touchent la surface suivant les coniques situées dans les plans correspondants.

La réciproque d'une surface du quatrième ordre est, en général, de l'ordre trente-six; mais ici, à cause des seize points singuliers, cet ordre se réduit de trente-deux, savoir, à quatre. Et les propriétés qui viennent d'être énoncées par rapport aux cônes circonscrits montrent que la réciproque étant de cet ordre est nécessairement une surface de la même espèce; c'est-à-dire:

"La réciproque d'un tétraédroïde est aussi un tétraédroïde."

Donc le tétraédroïde est surface de la quatrième classe. Puisque cette surface n'a pas de lignes doubles ou de lignes de rebroussement, il n'y a pas de réduction dans le nombre qui exprime *le rang* de la surface, lequel est ainsi égal à douze, c'est-à-dire le cône circonscrit est ordinairement de l'ordre douze. Mais nous venons de voir que ce cône est seulement de la quatrième classe (en effet, la classe du cône est la même chose que celle de la surface); donc il y a réduction de cent vingt-huit dans la classe du cône. Les seize points singuliers de la surface donnent lieu à autant de lignes doubles dans le cône, ce qui effectue une réduction de trente-deux; il y a encore une réduction à effectuer de quatre-vingt-seize, qui doit avoir lieu à cause des lignes doubles ou des lignes de rebroussement du cône. En supposant qu'il y a y de celles-ci et x de celles-là (outre les seize lignes doubles dont on a fait mention), il faut que l'on ait

$$2x+3y=96,$$

où $x+y$ ne doit pas être plus grand que trente-neuf; mais cela ne suffit pas pour déterminer ces deux nombres.

Nous pouvons encore ajouter que les seize cônes qui touchent la surface aux points singuliers sont circonscrits, quatre à quatre, à quatre surfaces du second ordre, et que les seize courbes de contact des plans singuliers sont situées quatre à quatre sur quatre surfaces du second ordre.

Je vais donner maintenant une idée de la théorie analytique. En représentant par

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad w=0$$

les équations des quatre faces du tétraèdre, et par

$$U=0$$

l'équation de la surface, U sera une fonction homogène du quatrième degré de x, y, z, w, laquelle, en faisant évanouir une quelconque des variables, doit se diviser en deux facteurs du second degré, *fonctions paires* des trois autres variables; de plus, à cause de la condition par rapport aux points singuliers, U ne peut pas contenir de terme $xyzw$. On doit donc avoir

$$U=Ax^4+By^4+Cz^4+2Fy^2z^2+2Gz^2x^2+2Hx^2y^2+2Lx^2w^2+2My^2w^2+2Nz^2w^2+Pw^4,$$

où il faut que les coefficients A, B, C, P, F, G, H, L, M, N aient un système inverse[1] de la forme 0, 0, 0, 0, f, g, h, l, m, n. Donc, en formant l'inverse de ce système, on obtient, toute réduction accomplie,

$$\begin{aligned}U=\ & mnfx^4+nlgy^4+lmhz^4+fghw^4\\ &+(\ lf-mg-nh)(\ ly^2z^2+fx^2w^2)\\ &+(-lf+mg-nh)(mz^2x^2+gy^2w^2)\\ &+(-lf-mg+nh)(\ nx^2y^2+hz^2w^2)=0.\end{aligned}$$

En effet, en écrivant

$$\begin{aligned}\lambda &= \ \ lf-mg-nh, \quad \mu=-lf+mg-nh,\\ \nu &= -lf-mg+nh, \quad \omega=\ \ lf+mg+nh,\\ \nabla &= l^2f^2+m^2g^2+n^2h^2-2mngh-2nlhf-2lmfg,\end{aligned}$$

l'équation de la courbe pourra s'écrire sous les quatre formes

$$\begin{aligned}(2mnfx^2+\ n\nu y^2+\ m\mu z^2+\ f\lambda w^2)^2 &= \nabla\,(n^2y^4+m^2z^4+f^2w^4-2mfz^2w^2-2fnw^2y^2-2nmy^2z^2),\\ (\ n\nu x^2+2nlgy^2+\ l\lambda z^2+\ g\mu w^2)^2 &= \nabla\,(l^2z^4+g^2w^4+n^2x^4-2gnw^2x^2-2nl\,x^2z^2-2lg\,z^2w^2),\\ (\ m\mu x^2+\ l\lambda y^2+2lmhz^2+\ h\nu w^2)^2 &= \nabla\,(h^2w^2+m^2x^4+l^2y^4-2ml\,x^2y^2-2lh\,y^2w^2-2hmw^2x^2),\\ (\ f\lambda x^2+\ g\mu y^2+\ h\nu z^2+2fghw^2)^2 &= \nabla\,(f^2x^4+g^2y^4+h^2z^4-2gh\,y^2z^2-2hf\,z^2x^2-2fg\,x^2y^2);\end{aligned}$$

[1] En général, quand deux systèmes de quantités sont exprimés linéairement les uns au moyen des autres, on dit que les deux systèmes de coefficients sont des systèmes inverses; on passe facilement de là à l'idée du système inverse des coefficients d'une fonction du second ordre, et de tels systèmes se rencontrent si souvent, que l'on doit avoir un terme pour exprimer sans circonlocution cette relation.

ce qui met en évidence les équations des sections de la surface par les quatre plans du tétraèdre, et aussi celles des points singuliers, lesquelles sont, en effet,

$$ny \pm mz \pm fw = 0, \quad lz \pm gw \pm nx = 0,$$
$$hw \pm mx \pm ly = 0, \quad fx \pm gy \pm hz = 0;$$

et ces plans touchent la surface suivant les courbes d'intersection avec les surfaces

$$2mnfx^2 + n\nu y^2 + m\mu z^2 + f\lambda w^2 = 0, \quad \&c., \ \&c.,$$

ce qui démontre le théorème énoncé par rapport aux seize courbes de contact des plans singuliers, et de là celui pour les seize cônes tangents aux points singuliers.

Pour déduire de là la forme ordinaire de l'équation de la surface des ondes, écrivons

$$l = \alpha\beta\gamma\,(b\gamma - c\beta), \quad m = \alpha\beta\gamma\,(c\alpha - a\gamma), \quad n = \alpha\beta\gamma\,(a\beta - b\alpha),$$
$$f = ka\alpha\,(b\gamma - c\beta), \quad g = kb\beta\,(c\alpha - a\gamma), \quad h = kc\gamma\,(a\beta - b\alpha),$$

équations qui suffisent pour déterminer les rapports

$$a : b : c : \alpha : \beta : \gamma : k$$

au moyen de l, m, n, f, g, h. De cette manière, l'équation de la surface se réduit à

$$\alpha\beta\gamma\,(ax^2 + by^2 + cz^2)\,(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$
$$- ka\alpha\,(b\gamma + c\beta)\,x^2w^2 - kb\beta\,(c\alpha + a\gamma)\,y^2w^2 - kc\gamma\,(a\beta + b\alpha)\,z^2w^2 + k^2abcw^4 = 0,$$

laquelle se réduit à la surface des ondes en écrivant

$$\frac{x}{w}\sqrt{\frac{\alpha}{k}} = \xi, \quad \frac{y}{w}\sqrt{\frac{\beta}{k}} = \eta, \quad \frac{z}{w}\sqrt{\frac{\gamma}{k}} = \zeta,$$

ξ, η, ζ étant des coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire en faisant la transformation homographique du tétraédroïde, de manière que l'un des plans du tétraèdre passe à l'infini, et que les trois autres deviennent rectangulaires. De plus, en particularisant la transformation de manière que trois des coniques d'intersection se réduisent à des cercles, cette surface rentre dans la surface des ondes. Il va sans dire que, dans le cas général, plusieurs des points ou des plans dont nous avons parlé sont nécessairement imaginaires; l'énumération de tous les cas différents aurait été d'une longueur effrayante. Il y aurait beaucoup à dire sur les cas particuliers où quelques-unes des coniques se réduisent à des paires de droites (réelles ou imaginaires). Je me contente d'énoncer cette propriété, très-facile à démontrer, de la surface ordinaire des ondes: au cas où $c = 0$, cette surface peut être engendrée par un cercle (ayant le centre de la surface pour centre, et dans un plan passant par l'axe des z), lequel se meut de manière à passer par la conique

$$a^2x^2 + c^2y^2 = a^2b^2.$$

On trouve, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. I. [1846], p. 208, [38] la démonstration d'une autre propriété de la surface des ondes par rapport aux lignes de courbure des surfaces du second ordre.